# PROVAS DO IME | 1977 A 2006

## IME 1976/1977

**Matemática I**

1) (IME-77) Seja $x \in \Re$. Determine o conjunto A onde $A \subset \Re$, o domínio de definição da função f: $x \to \log_2(x^2 - x - 1)$.

2) (IME-77)
a) Seja $z = a + bi$ $(a, b \in \Re)$. Determine *a* e *b* tais que $z^2 = 3 - 4i$.
b) Seja $f: C \to C \quad z \to iz + 2 + 3i$
Seja o conjunto $A = \{x + iy \in C \mid x^2/9 + y^2/4 = 1\}$. Determine o conjunto B imagem de A pela função *f*.

3) (IME-77) Seja $P_3(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5) + k(x + 2)(x + 4)$, onde $x \in C$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume os valores em $\Re^+$, desenhando este lugar geométrico no plano complexo.

4) (IME-77) Sejam $x_1$ e $x_2$ raízes da equação $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$, onde $a, b, c, d \in \Re$. Determine $A$ de modo que $x_1^3$ e $x_2^3$ sejam as raízes da equação: $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + A = 0$.

5) (IME-77) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 3 em que $a_{ij} = 0$ se $i \geq j$ e $a_{ij} \neq 0$ se $i < j$. Determine o menor inteiro positivo r tal qie $A^r = 0$. (0 representa a matriz nula)

6) (IME-77) Dada equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

7) (IME-77) Dada a sucessão $A = (A_n)$, onde $A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \subset IR$, pede-se determinar B, C, D, abaixo.

a) $\bigcup_{k=1}^{3} A_k = B$; b) $\bigcap_{t=2}^{4} A_t = C$; c) $\bigcap_{t=1}^{3}\left(\bigcup_{k=t}^{3} A_k\right) = D$

8) (IME-77) Sejam f, g, h e j funções reais de variável real definidas como:

$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in ]0,3[ \\ x^2 - 7 & \text{se} \quad x \in ]3,7[ \end{cases}$;

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in ]0,3[ \\ 2x+3 & \text{se} \quad x \in ]3,7[ \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-4} & \text{se} \quad x \in ]0,3[ \\ x-2 & \text{se} \quad x \in ]3,7[ \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \in ]0,3[ \\ x-1 & \text{se} \quad x \in ]3,7[ \end{cases}$$

Obtenha, se existir, o limite de cada função acima no ponto x = 3. Quando não existir o limite, determine à esquerda, isto é, o limite quando x se aproxima por valores inferiores a 3.

9) (IME-77) Seja o polinômio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ onde $a_i \in IR$, i = 0, 1, ..., n, $a_0 \neq 0$, cujas n raízes são reais e distintas. Sabendo-se que o polinômio f' (derivada de f com relação a x) tem n – 1 raízes, demonstre que essas n – 1 raízes são reais e distintas.

10) (IME-77) Considere a curva de equação $y = x^2/2$. Determine as coordenadas do ponto desta curva mais próximo do ponto de coordenadas (4, 1).

11) (IME-77) Sendo $x \in IR$, calcule: $\lim_{x \to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$ .

12) (IME-77) Divide-se um quadrado de lado 1 em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central. Procede-se da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Este processo é realizado n vezes.
a) Quantos quadrados de lado $1/3^n$ são conservados?
b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende a infinito?

**Matemática II**

1) (IME-77) De um ponto exterior E a um círculo (O) qualquer traçam-se duas tangentes t e t' a esse círculo, sendo os pontos da tangência P e P'. O ângulo PÊP' mede 140º. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10º no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 30º, no mesmo sentido do arco PA. Pede-se: a) o ângulo $E\hat{P}P'$; b) o ângulo $B\hat{P}'E$; c) o número de lados do polígono inscrito no círculo (O) cujo lado é a corda BP.

2) (IME-77) Traçam-se dois círculos de raio r e centros em O e O' (cada um passando pelo centro do outro), que se cortam em I e J. Com centro em I e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em A e (O') em A'. Com centro em J e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em B e (O') em B'. Em (O) o diâmetro dO tem a outra extremidade em C; em (O') o diâmetro dO' tem a outra extremidade em C'. Os arcos AA', A'C'B', B'B e BCA formam uma oval com quatro centros. Pede-se a área desta oval em função de r.

3) (IME-77) Seja ABCD um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos A, B, C e D, que denominam respectivamente $T_A$, $T_B$, $T_C$ e $T_D$ e que determinam os pontos $M = T_A \cap T_B$; $N = T_B \cap T_C$; $P = T_C \cap T_D$; $Q = T_A \cap T_D$. Prove que: 1) O quadrilátero MNPQ é inscritível; 2) As retas AB, CD e NQ são concorrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC, e NQ em um outro ponto V.

4) (IME-77) Sejam A, B $\in \Re^2$ de coordenadas cartesianas (2, 5) e (1, 3), vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos. Obs: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a orientação axiomática.

5) (IME-77) Prove que para todo arco x cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

6) (IME-77) Uma superfície cilíndrica $\Sigma$ de revolução tem raio r.
a) Considera-se um cilindro $\gamma$ reto de altura h, obtido cortando-se $\Sigma$ por dois planos. Calcule h em função de r, sabendo-se que existe um octaedro regular que tem seus vértices sobre a superfície lateral de $\gamma$ e nos centros das bases de $\gamma$.
b) Corta-se $\Sigma$ por um plano $\pi$ tal que a área da seção seja o dobro da área da seção reta de $\Sigma$. Calcule o ângulo de $\pi$ com o eixo de $\Sigma$, e a distância entre os centros das esferas inscritas em $\Sigma$ e tangentes a $\pi$.

7) (IME-77) Um plano $\pi$ faz um ângulo de 30º com um plano horizontal $\alpha$, e a reta r é a interseção entre esses dois planos. Seja A um ponto de r e ABCD um quadrado de lado a e centro O contido em $\pi$, cuja diagonal BD é paralela a r.
a) Indique a natureza da projeção ortogonal de ABCD sobre $\alpha$, calcule o comprimento dos lados e a área dessa projeção.
b) Determine um ponto I do plano $\alpha$ eqüidistante dos vértices A, B, C, D calculando também a distância de I ao ponto A.

8) (IME-77) Em um plano são dados três círculos tangentes entre si, dois a dois, externamente. Seus centros formam um triângulo ABC pseudo-retângulo (isto é, a diferença de dois de seus ângulos é 90º): AB = 100; Â = 30º. Calcule a área do triângulo curvilíneo determinado por esses círculos, pelos menores arcos entre cada dois pontos de tangência.

# IME 1977/1978

**Matemática I**

1) (IME-78) Determine as soluções da equação
$36x^2 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$
dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

2) (IME-78) Seja um polinômio

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Com coeficientes reais. Sabe-se que p(0) = 0, p(2) = 4, que a reta tangente a p(x) no ponto (1,1) é paralela à reta y = 2x + 2 e que a reta tangente a p(x) no ponto (2,4) é perpendicular à reta y = $-\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes $a_3$, $a_2$, $a_1$, $a_0$.

3) (IME-78) Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):
I) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem).
II) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

4) (IME-78) Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que h(– 1) = 4; h(0) = 0; h(1) = 8. Defino uma função g como g(x) = h(x) – 2. Prove que a equação g(x) = 0 admite, pelo menos, duas soluções distintas.

5) (IME-78) Seja o conjunto A = {z $\in$ C/ |z| = 1}.
Determine a imagem de A pela função g, complexo de variável complexa, tal que g(z) = (4 + 3i)z + 5 – i.
Obs: C é o conjunto dos números complexos

6) (IME-78) Para t > 0 e x $\geq$ 1, defino a função $f_t$, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f_t(x),\ x \geq 1.$$

Determine f($e^2$), onde e é a base dos logaritmos neperianos.

7) (IME-78) Sejam A, B, C, D matrizes reais 2 x 2.

$A = (a_{ij})$; $A^{-1} = B = (b_{ij})$
$C = (c_{ij})$; $c_{ij} = a_{ij}^{-1}$
$D = (d_{ij})$; $d_{ij} = b_{ij}^{-1}$

Sabe-se que $a_{ij}.b_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$, e que C é matriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D.

8) (IME-78) Seja m uma função real de variável real definida como: m (x) = |7 – x|. Diz-se que uma função u, real de variável é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\varepsilon$ > 0, existe um número real $\delta$ > 0 tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se |y – a| < $\delta$, então |u(y) – u(a)| < $\varepsilon$. Quer-se testar a continuidade de m no ponto x = – 2. Escolhe-se um $\varepsilon$ = 0,01. Determine um $\delta$ conveniente, para este valor de $\varepsilon$. Justifique sua resposta.
Obs: |h| é o valor absoluto de h.

9) (IME-78) Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $p_2 = (x_2, y_2)$; $p_4 = (x_4, y_4)$; $p_6$ $(x_3, y_3)$; $p_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. o segmento $p_2p_3$ não é paralelo ao segmento $p_1p_4$ ; o segmento $p_1p_6$ não é paralelo ao segmento $p_2p_5$ e o segmento $p_3p_6$ não paralelo ao segmento $p_4p_5$. Sejam: A, a interseção dos segmentos $p_2p_3$ e $p_1p_4$ ; B, interseção de $p_1p_6$

com $p_2p_5$ e C, interseção de $p_3p_6$ com $p_4p_5$. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

10) (IME-78) Dadas as parábolas $y_1$ e $y_2$, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2 + 1$, sabe-se que a área entre $y_1$ e $y_2$, mediante entre x = 0 e x = 5 e igual a 3 vezes a área entre $y_1$ e $y_2$, mediante entre x = 5 e x = a. Determine a.

11) (IME-78) Se x(t) é o número de parasitas existentes no tempo t, em uma população hospedeira y(t), a relação entre as duas populações pode ser descrita por

$$Y^A e^{BY} = kx^R e^{Sx}$$

Onde A, B, R e São constantes apropriadas. Pede-se determinar $\frac{dy}{dx}$.

12) (IME-78) Uma sequência $(x_n)_{n \in n^*}$ de números racionais diz-se regular se $|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$, m, n $\in$ n*. Dada uma sequência regular $t = (t_n)_{n \in n^*}$, definido $K_t$ = menor inteiro maior que $|t_1|$ + 2. Sejam x e y sequências regulares de K = máximo{$K_x$, $K_y$}. Defino a sequência $z = (z_n)_{n \in n^*}$ como $z_n = x_2k_n.y_2k_n$, $n \in n^*$. Prove que $(z_n)_{n \in n^*}$ é uma sequência regular.
Obs: n* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é, n* {1, 2, 3, ...}.

**Matemática II**

1) (IME-78) Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, todos do primeiro quadrante, e tais que tg $\hat{A}$ = 1/3, tg $\hat{B}$ = 1/5, tg $\hat{C}$ = 1/7 e tg $\hat{D}$ = 1/8, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

2) (IME-78) Designa-se por (T) um triângulo ABC no qual sua altura AD é cortada ao meio no ponto H, pela altura CE.
a) Demonstrar que as tangentes dos ângulos internos B e C de um triângulo (T) verificam à relação tg $\hat{B}$ . tg $\hat{C}$ = 2 (*)
b) Suponha satisfeita a relação (*), dá-se o ângulo Â do triângulo (T). Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Qual a condição que deve ser satisfeita pelo ângulo Â para que o triângulo (T) exista?

3) (IME-78) Sejam um círculo (O) de centro O, um ponto A fixo exterior a (O), e um diâmetro BC móvel.
a) Mostrar que o círculo circunscrito ao triângulo ABC passa por um ponto fixo I (I distinto de A).
b) As retas AB e AC cortam o círculo (O) nos pontos D e E respectivamente, e DE corta OA em P. Comparar os ângulos $B\hat{I}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}E$ e mostrar que o quadrilátero IBDP é inscritível, sendo o ponto P fixo.
OBS: Sugere-se que entre as propriedades a serem aplicadas na solução deste problema, estejam as da potência de um ponto em relação a um círculo.

4) (IME-78) Dá-se um icosaedro (I) regular convexo de aresta $\ell$.

a) Calcular o ângulo diedro $\hat{d}$ de (I). (Apresentar uma expressão trigonométrica, numérica, que permita calcular o valor do ângulo diedro $\hat{d}$).

b) Seja V um vértice de (I): V e os vértices de (I) adjacentes (isto é, os que são ligados a V por arestas de (I)), determinam um poliedro (P) cujas arestas são arestas do icosaedro. Calcular o volume de (P) em função de $\ell$.

5) (IME-78) Dado um triedro de vértice S, consideram-se duas seções paralelas: uma fixa ABC, com o triângulo $A_1B_1C_1$ traçado pelo meio dos lados BC, AC e AB, e outra seção móvel $A_2B_2C_2$. ($A_1$ é meio de BC, $C_1$ de AB e $B_1$ de AC, e $AA_2$, $BB_2$ e $CC_2$ estão respectivamente nas arestas SA, SB e SC). Mostrar que as retas $A_1A_2$, $B_1B_2$ , $C_1C_2$ passam por um mesmo ponto e determinar o lugar geométrico desse ponto.

6) (IME-78) A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.
a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N , bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.
b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N' respectivamente, mostre que o círculo MT'N' passa pelos focos F e F'.

7) (IME-78) Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r. No plano da base desse cone toma-se um ponto A, à uma distância x do ponto O ($x > r$). Pelo segmento VA traçam-se dois planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, e pertencem ao plano da base).
a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.
b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto. Qual a condição para que este problema tenha solução?

8) (IME-78) Dá-se uma semi-esfera cuja base é um círculo (C) de raio r. Corta-se a semi-esfera por um plano $\pi$ paralelo a base, o qual determina sobre a semi-esfera um círculo (C 1) de raio x. Estabeleça a relação entre x e r para tornar possível traçar sobre a semi-esfera, três círculos tangentes aos círculos (C) e ($C_1$) e também tangentes entre si dois a dois.

## IME 1978/1979

**Matemática I**

1) (IME-79) Admita Y = (a, b, c) e seja a função $h: Y \times Y \to Y$ definida por:

| | | |
|---|---|---|
| h (a,a) = a | h (b,a) = b | h (c,a) = c |
| h (a,b) = a | h (b,b) = c | h (c,b) = a |
| h (a,c) = c | h (b,c) = a | h (c,c) = b |

Considere uma $f : \mathbb{Z} \to Y$ tal que:

f (0) = a
f (1) = b
e $\forall$ n, m $\in \mathbb{Z}$, f (n + m) = h (f(n), f (m) ).

Sabe-se que $\forall n \in \mathbb{Z}$, f (3n) = a.

a) Determine $y \in Y$, tal que h(y, f (52) ) = f (45).

b) Encontre um $H \subset \mathbb{Z}$, tal que f (H) = {c}.

2) (IME-79) Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine *x*, sabendo que existe uma matriz inversível *P* tal que $A = P^{-1}.B.P$

3) Seja a equação $x^3 + px^2 + qx + r + 0$ cujas raízes são: a, b, c. Determine s, t e u, em função de p, q e r, para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes bc, ca e ab.

4) (IME-79) Considere a família de curvas:
$y(m) = mx^2 – (1 + 8m)x + 4(4m + 1)$.
Determine:
a) As coordenadas do ponto P, comum a todas essas curvas.
b) A curva da família tal que a tangente no ponto de abscissa x = 1 tenha coeficiente angular igual de 1.

5) (IME-79) Calcule $\lim_{x \to \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$.

6) (IME-79) Determine os valores máximo e mínimo de $|z – 4|$, sabendo-se que $|z + 3i| \le 1$, onde $z \in C$.

7) (IME-79) Seja uma progressão aritmética de 1º termo $a_1 \neq 0$ e último termo $a_{10}$ tal que $a_1 \neq a_{10} \neq 0$. Seja a progressão aritmética de 1º termo $b_1 = \frac{1}{a_1}$ e último termo $b_{10} = \frac{1}{a_{10}}$. Calcule $\frac{a_5}{b_6}$ em função de $a_1$ e $a_{10}$.

8) (IME-79) Um elevador com 7 pessoas parte do nadar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até 4ª parada, inclusive.
Obs: Seja $n_i$ o número de pessoas que desembarcam na i-ésima parada {i = 1, 2, 3, 4} : $\sum_{i=1}^{4} n_i = 7$, $n_i \ge 0$.

9) (IME-79) É dada a função $f : R \to R$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+k}{\sqrt[3]{x^2-1}}, & \text{se} \quad x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{se} \quad x = 1 \\ -1, & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$$

a) Se k = – 1, determine os pontos de descontinuidade de f.
b) Se k = 0:
i) Determine as raízes de f'(x) = 0.
ii) Determine as Raízes de f''(x) = 0.

iii) Faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

10) (IME-79) Determine a área da superfície finita entre as curvas de equação $y = 16 - x^4$ e $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

**Matemática II**

1) (IME-79) Achar os valores de x que satisfazem a equação: $\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \text{arcsen}(\cos x)$

2) (IME-79) Seja uma circunferência (C) na qual está inscrito um pentágono regular convexo ABCDE (nesta ordem sobre (C) e no sentido trigonométrico). Considere M o ponto médio do arco AE < 180º e P um ponto qualquer do mesmo arco:
a) Sendo $P \neq M$, $P \neq A$ e $P \neq E$, prove que
$$PA + PE + PC = PB + PD \qquad (1)$$
b) Se P coincidir com A, mostre o que acontece com a relação (1).
c) Se P coincidir com M, mostre que de (1) pode-se obter uma relação entre o raio da circunferência ( C ) e os lados dos decágonos regulares inscritos convexo e estrelados.
Obs: As soluções dos três sub-itens acima são independentes.

3) (IME-79) Seja (T) um triângulo ABC tal que $\hat{C} = 2\hat{A}$:
a) Calcule, em função do $\cos \hat{A}$, as excentricidades da elipse e da hipérbole de focos A e B e que passam por C.
b) Supondo-se existir (T), qual a relação de igualdade que devem satisfazer os lados AB, BC, CA.

4) (IME-79) Dados um triângulo ABC de área S, prolongam-se seus lados C A, AB e BC:
CA, no sentido de C para A, até A', tal que AA' = k.CA;
AB, no sentido de A para B, até B', tal que BB' = k.AB;
BC, no sentido de B para C, até C', tal que CC' = k.BC.
Onde k é uma constante positiva. Sendo o triângulo A' B' C' de área S', determine k para que S' = 19S.

5) (IME-79) Dá-se num plano $\pi$ um triângulo eqüilátero ABC de lado a, a > 0, e tira-se por A uma semi-reta AX perpendicular ao plano $\pi$. Seja V a extremidade do segmento AV de comprimento a, situado nessa semi-reta:
a) Calcule o volume da pirâmide VABC e, caso a mesma admita um plano de simetria, identifique-o.
b) Considere uma reta r do plano VBC paralela à reta BC, tal que o plano VBC e o plano determinado por r e pelo ponto A sejam perpendiculares. Sejam D a interseção de r com VB e E a interseção de r com V C. Calcule o volume da porção da pirâmide VABC que está compreendida entre os planos ABC e ADE.

6) (IME-79) Considere a família de triângulos ABC onde BC = a, AB = c e AC = b. Os pontos B e C são fixos e A varia de tal maneira que b – c = k (constante).
a) Pede-se o lugar geométrico do ponto D, encontro da bissetriz inteira do ângulo $\hat{A}$ com a perpendicular baixada do vértice C àquela bissetriz.
b) Supondo o caso particular $\hat{A} = 60º$, $a = 4\sqrt{3}$ e b – c = 4, calcule os valores em radianos dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

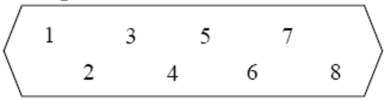
7) (IME-79) Um cone de revolução de vértice V é seccionado por um plano que determinar uma seção parabólica (P). Sejam respectivamente S e F o vértice e o foco de (P). São dados: VS = 12 e SF = 3:
a) Determine $\alpha$ (ângulo do eixo do cone com sua geratriz).
b) Determine a área do segmento parabólico compreendido entre a parábola e a corda focal perpendicular ao seu eixo.

8) (IME-79) Sejam (C) uma superfície cônica de revolução, de vértice V, cujos semi-ângulo no vértice é 45º, r uma reta paralela ao eixo de revolução de (c) e $\pi$ o plano passando por V e perpendicular a r. A reta r atravessa o plano $\pi$ em O. VO tem comprimento 2a, a > 0. Seja $\ell$ a perpendicular comum a r e a geratriz g de (C); $\ell$ corta g em A e r em B.
a) A' sendo a projeção ortogonal de A sobre $\pi$, ache o lugar do ponto A' quando g varia.
b) Identifique as retas $\ell$ situadas em um plano p paralelo a $\pi$. Examine o que ocorre quando varia a distância entre os planos $\pi$ e $\rho$.
c) Mostre que os pontos A (quando g varia) pertencem a uma esfera (e) de centro (O).

# IME 1979/1980

**Matemática I**

1) (IME-80) Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:




Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-los, com as seguintes restrições: Os remadores A e B só podem se sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

2) (IME-80) Seja I = [– 1, 2] $\in$ R. Dê exemplo de uma função contínua em i tal que não exista um ponto a $\in$]– 1, 2[ que satisfaça a condição:

$$f(x) - f(-1) = 3f'(a)$$

3) (IME-80) Determine o polinômio f(x) de coeficientes racionais e do 7º grau, sabendo-se que: f(x) + 1 é divisível por $(x - 1)^4$ e que f (x) – 1 é divisível por $(x + 1)^4$.

4) (IME-80) Seja a sequência, real $(x_n)$, n = 0,1,... tal que:
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, n = 2, 3, ...

Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n - x_{n-2}}{n}\right) = 0$.

5) (IME-80) Resolva as equações:
$x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$ $\qquad$ $x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$
Sabendo-se que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

6) (IME-80) Seja, para n = 1, 2, 3, ... a coleção B(n) = { M | M = $[m_{ij}]$ é matriz quadrada de ordem n e $|m_{ij}| = 1$. (Note que B(2) tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que se $M \in B(n)$ então o determinante de M é múltiplo de $2^{n-1}$, para n = 1, 2, 3,...

7) (IME-80) Seja f uma função real variável real, não constante, continua, tal que existe uma função $\phi$, $\phi$: $IR^2 \to IR$ tal que $f(x + y) = \phi(f(x), y)$, para todos x e y reais. Prove que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

8) (IME-80) Prove que: $n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i$ , onde $a_i = (n - 1)n + 2i - 1$.

9) (IME-80) Um velho manuscrito descrevia a localização de um tesouro enterrado: Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B uma jaboticabeira. A parti do centro k do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90º à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto de C. Volte ao canteiro. Meca a distância em linha reta até a jaboticabeira. Vire 90º à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento C D. Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores mas, como o canteiro desaparecera com passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de A = (5,3) e B = (8,2).

10) (IME-80) Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que:

$$MD = MF$$

**Matemática II**

1) (IME-80) Seja ABC um triângulo no qual se supõe que a mediana AM é tal que o triângulo ABM é semelhante ao triângulo ABC.
a) Calcule a razão de semelhança, e determine o lugar geométrico do vértice B supondo A e C fixos.
b) Mostre que o círculo que passa pelos pontos A, C e M tangencia a reta AB.

2) (IME-80) São dados um círculo (c) de centro K, raio R e um ponto fixo A, tal que 0 < AK < R. Por A traçam-se duas semirretas (d) e (d'): (d) corta a circunferência de (c) em M e (d') em N. M e N se deslocam ao longo da circunferência de (c) de modo que AM e AN são sempre perpendiculares. Ache o lugar geométrico do ponto médio I do segmento MN.

3) (IME-80) Dão-se duas circunferências de raios 8 e 3, tangentes internas. Pelo ponto T de contato se traça a tangente comum e sobre ela se toma uma distância TA = 6. Seja (s) uma secante aos círculos que passa por A. (s) faz com TA um ângulo $\alpha$ ($\alpha \neq 0$), e corta a circunferência maior nos pontos D e E e a menor nos pontos P e Q. Calcule $\alpha$ de modo que DE = 2 PQ.

4) (IME-80) São dadas duas esferas ($e_1$) de centro $O_1$ e raio 3, e ($e_2$) de centro $O_2$ e raio 9. $O_1$ dista de $O_2$ de 20. Essas esferas são focais de uma seção elítica (E) de um cone de revolução. Determine a excentricidade e a distância focal de (E).
OBS: Esferas focais de uma seção são esferas inscritas num cone que tangenciam o plano seção.

5) (IME-80) Um quadrilátero reverso ABCD é constituído pela justaposição de dois triângulos isósceles ABC e BCD (AB = AC e DB = DC) cujos planos são perpendiculares e cujas alturas medem respectivamente 6 e $6\sqrt{3}$. A base comum dos dois triângulos é BC = 8. Projeta-se ortogonalmente o quadrilátero ABCD sobre um plano de modo que a projeção seja um paralelogramo (P). Como deve ser feita a projeção e qual é a área do paralelogramo (P)?

6) (IME-80) Dá-se um paralelogramo ABCD num plano $\pi$ e um outro EFGH num plano $\pi'$ de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas as arestas de comprimento a. O plano que contém os pontos A, E e F forma com $\pi$ um ângulo de 60º e AEF = 120º. Calcular em função de a e do ângulo FEH = $\theta$ o volume de (P).

7) (IME-80) Dá-se um hexágono de lado $\ell$ num plano $\pi$, e num plano $\pi'$ paralelo a $\pi$, um triângulo equilátero de lado $\ell$, numa posição tal que cada altura do triângulo é paralela à uma diagonal maior do hexágono. Os baricentros do hexágono e do triângulo estão na mesma perpendicular comum aos seus planos. A distância entre $\pi$ e $\pi'$ é $\ell$. Dê, em função de $\ell$, o volume do sólido que se obtém, quando se liga cada vértice do triângulo aos três vértices mais próximos do hexágono.

8) (IME-80) Determine x na equação

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

9) (IME-80) Sejam $\ell_4$, $\ell_6$ e $\ell_{10}$ os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados, constroem-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que BC = $\ell_4$, AC = $\ell_6$ e AB = $\ell_{10}$. Pede-se calcular o ângulo A do triângulo ABC.

# IME 1980/1981

**Matemática I**

1) (IME-81) Dada a função f: IR → IR definida como

$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

f(x) = 1, x = 0

determine os valores de m para os quais o gráfico de f admite tangente paralela à reta y = mx.

2) (IME-81) Determine os valores de h, de modo que a desigualdade $-3 < \dfrac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ seja válida para qualquer x real.

3) (IME-81) Dados dois triângulos equiláteros ABC e A'BC traça-se por A' uma reta qualquer que encontra os lados AC e AB, ou os seus prolongamentos, nos pontos D e E, respectivamente. Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas BD e CE.

4) (IME-81) Mostre que não existem matrizes quadradas A e B, que verifiquem AB − BA = I, onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

5) (IME-81) Mostre que o número $\underbrace{4444...44}_{n \text{ vezes}}\underbrace{8888...88}_{(n-1) \text{ vezes}}9$ é um quadrado perfeito.

6) (IME-81) O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a um jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B, neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

7) (IME-81) A população de um país, no ano t, t ≥ 1860, é dada, aproximadamente, por:

$$N(t') = \frac{L}{1 + e^{\frac{\lambda - t'}{\alpha}}}, \text{ onde } t' = t - 1860;$$

L, $\lambda$, $\alpha$ são constantes reais e $10^6 \times N(t')$ é o número de habitantes.
a) Calcule a população do país no ano 2000, sabendo-se que em 1860, ele tinha 15 milhões de habitantes, em 1895, 18 milhões de habitantes e em 1930, 20 milhões de habitantes.
Notação: e é a base do sistema de logaritmos neperianos.
b) Ao longo do tempo, a população tenderá a um número finito de habitantes? Justifique sua resposta.

8) (IME-81) Seja C o conjunto dos números complexos e seja $h \in C$. Diz-se que um ponto h é um ponto de Hurwitz se |h| = 1 e, para todo número natural n, $h^{n+1} \neq 1$. Prove que o ponto $z = \dfrac{2-i}{2+i}$, é um ponto de Hurwitz.

9) (IME-81) Prove a seguinte identidade:
$\binom{n+1}{2m+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m}$, onde n e m são inteiros positivos e $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ para $n \geq m$ e $\binom{n}{m} = 0$ para n < m.

10) (IME-81) Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada real nxn de termos positivos. Define-se o "permanente de M" como $\text{perm}M = \sum_{S} m_{1+(1)} . m_{2+(2)} ... m_{n+(n)}$ onde S é o conjunto das

permutações (t(1), t(2), …, t(n)) de {1, 2, …, n}. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem, por exemplo, como permanente 1x5x9 + 4x8x3 + 2x6x7 + 3x5x7 + 2x4x9 + 1x6x8. Seja a matriz nxn, H ($h_{ij}$) onde $h_{ij}$ = i(j + 1). Calcule o permanente de H.

**Matemática II**

1) (IME-81) Seja (c) um círculo de raio r, distante h de um plano ($\pi$), I o traço nesse plano do eixo ($\Delta$) do círculo (isto é, a perpendicular ao plano de (c) pelo centro de (c)), e P um ponto fixo de ($\pi$) distante h de I. Liga-se P a um ponto M, móvel, que percorre toda a circunferência de (c), e define-se um plano ($\sigma$) variável, normal a ($\pi$), que conterá sempre PM. Na interseção de ($\sigma$) com ($\pi$) existem dois pontos distantes $h\sqrt{3}$ de M. Seja A aquele cuja distância a P é a maior. Determine:
a) o lugar geométrico de A quando M percorre toda a circunferência de (c);
b) o máximo valor de IA.

2) (IME-81) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a b e altura igual a $\frac{3b}{2}$, traça-se o plano perpendicular à aresta VB no ponto M, tal que este plano contenha os vértices A e C. Determine, para a pirâmide de vértice M e base ABC, assim formada:
a) o comprimento da aresta AM;
b) o volume.

3) (IME-81) Sejam $\ell_9$ o lado do eneágono regular convexo, $\ell_9{*}$ e $\ell_9{**}$ os lados dos eneágonos estrelados ($\ell_9{*} < \ell_9{**}$), todos inscritos em um círculo de raio r. Mostre que: $\ell_9 = \ell_9{**} - \ell_9{*}$.

4) (IME-81) Determine todos os valores de x, y e z, situados no intervalo fechado [0, $\pi$], satisfazendo ao sistema:
cos x + cos 2y = 0
cos y + cos 2z = 0
cos z + cos 2x = 0

5) (IME-81) Um ângulo $\alpha$ de grandeza constante, situado em um plano ($\pi$), gira em torno de seu vértice A, que é fixo, permanecendo no plano ($\pi$). De um ponto B, fixo, no plano ($\pi$), tiram-se perpendiculares BC e BD aos lados do ângulo $\alpha$. Determine o lugar geométrico dos pontos C e D. Mostre que CD tem comprimento constante e determine o lugar geométrico do ponto médio de CD.

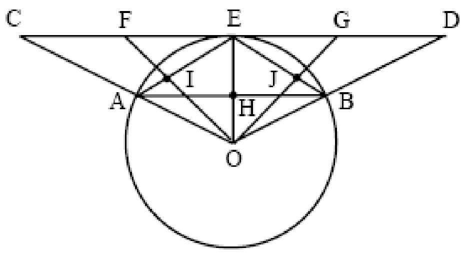
6) (IME-81) Uma esfera ($\varepsilon$) de raio r e centro O tangencia um plano ($\pi$) em M. Sobre a reta OM, no mesmo semi-espaço determinado pelo plano ($\pi$) em que se acha a esfera ($\varepsilon$), marca-se um ponto V tal que VO = x > r, e traçam-se 3 retas, partindo de V, que tangenciam a esfera em A, B e C, sendo $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \pi/2$. Calcule x em função de r e determine, também em função de r, as dimensões da calota seccionada na esfera pelo plano VAB (isto é: o raio da base da calota e sua altura).

7) (IME-81) Dá-se uma elipse de vértices $A_1$ e $A_2$, definida por: $A_1 A_2 = 2a$ (eixo focal), $B_1B_2 = 2b$ (eixo não focal). Sejam $F_1$ e $F_2$ os focos da elipse, e uma tangente à elipse em um ponto M qualquer ($M \neq A_1$ e $M \neq A_2$). Esta tangente é cortada nos pontos $T_1$ e $T_2$ respectivamente pelas tangentes à elipse nos vértices $A_1$ e $A_2$. Mostre que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível e que o produto $A_1T_1.A_2T_2$ é constante.

8) (IME-81) Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC, com os lados BC, AC e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação $\frac{EF}{BC}$ em função de sen B/2 e sen C/2.

9) (IME-81) Considere a sucessão $P_n$, $p_n$, $P_{2n}$, $p_{2n}$, $P_{4n}$, $p_{4n}$, $P_{8n}$, $p_{8n}$ ... (1) na qual $P_k$ é o semiperímetro do polígono regular de K lados circunscrito ao círculo unitário, e $p_k$ é o semiperímetro do polígono regular de K lados inscrito no mesmo círculo.

a) usando a figura ao lado, estabeleça a fórmula $P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}$




b) calcule o limite da sucessão (1)

10) (IME-81) Calcule os eixos e a excentricidade da cônica, seção por um plano ($\pi$) em um cone de revolução ($\Gamma$), de vértice V, sabendo-se:
a) a excentricidade da seção por ($\pi$) é a maior possível para o cone ($\Gamma$);
2) V dista de ($\pi$) 6 unidades de comprimento.
3) ($\Gamma$) é tal que a seção por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

# IME 1981/1982

**Matemática I**

1) (IME-82) a) Seja a função:
$y = mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1)$
onde m é um número dado, mas variável. Mostre que todas as curvas representativas da função passam por um ponto A fixo e que são todas tangentes entre si, neste ponto. Calcule as coordenadas do ponto A e dê a equação da tangente comum.

b) Determine os dois valores de m para os quais a razão entre as raízes da equação:
$mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1) = 0$
é igual a $-\frac{1}{4}$

2) (IME-82) Seja $M_n$ (R) o conjunto de matrizes quadradas de ordem n, de coeficientes reais. Define-se a função,

$$\Psi : M_n ( R ) \times M_n ( R ) \rightarrow M_n ( R )$$
$$\Psi( A,B) = AB - BA$$

Calcule:

$$\Psi(\Psi(A,B),C) + \Psi(\Psi(B,C), A) + \Psi(\Psi(C,A), B)$$

3) (IME-82) Dado o número $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, determine quantos números inteiros positivos não maiores que m são primos relativos com m.

4) (IME-82) Calcule o coeficiente do termo em $x^3$, no desenvolvimento de:

$$(2x - 3)^4(x + 2)^5.$$

5) (IME-82) Seja a função f definida, no conjunto dos pares, por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad x \leq -2 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{para} \quad -1 < x \leq 0 \\ e^{-2x}, & \text{para} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

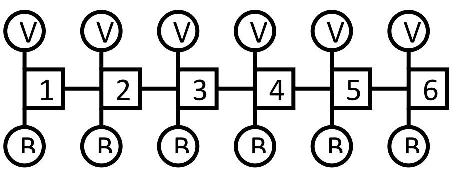
a) Determine o domínio e a imagem de f.
b) Determine os pontos de descontinuidade e os pontos onde f não é derivável.
c) Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.
d) Determine os pontos e os valores de máximo e mínimo de f. Calcule o supremo e o ínfimo da imagem de f.

6) (IME-82) Determine as equações de uma circunferência com centro no ponto (– 2, 2) e tangente à circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

7) (IME-82) a) O quadrado de qualquer número par 2n pode ser expresso como a soma de n termos, em progressão aritmética. Determine o primeiro termo e a razão desta progressão.
b) Três progressões geométricas têm mesma razão q e primeiros termos diferentes a, b, c. A soma dos n primeiros termos da primeira é igual à soma dos 2n primeiros termos da segunda e igual à soma dos 3n primeiros termos da terceira.
Determine a relação que liga as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, em função somente de a, b e c.

8) (IME-82) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existente uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



**Matemática II**

1) (IME-82) Sejam duas retas paralelas (r) e (s), e um segmento AB (A pertencente a (r) e B pertencente a (s)), perpendicular a ambas. Sobre (r) e (s), e à direita de AB, marcam-se os pontos C e D, tais que $\overline{AC}.\overline{BD} = \frac{\overline{AB}^2}{4}$. Tomando-se C e D como centros, traçam-se os círculos (c) e (d) tangentes a AB.

a) Sendo O o meio de AB, mostre que o triângulo COD é retângulo e que (c) e (d) são tangentes entre si em um ponto M, cujo lugar geométrico é pedido.

2) Prolongando-se AM até B', pertencente a (s), e BM até A', pertencente a (r), calcule AC, tal que AA' + BB'= 4AB.

2) (IME-82) Dado um retângulo ABCD, de lados a e b, divide-se a diagonal BD em n segmentos iguais, marcando-se os pontos $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (na ordem B, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, D). Estabeleça a expressão geral dos segmentos $CM_k = \ell_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, em função de a, b, n e k.

3) (IME-82) Considera-se um quadrado ABCD pertencente a um plano (π). Traçam-se pelos quatro vértices perpendiculares ao plano (π). Sobre o prolongamento de DA (no sentido de D para A), marca-se a partir de A um segmento AI igual a a e sobre o prolongamento de CB (no sentido de CB), marca-se a partir de B um segmento BJ igual a b , tal que a > b. Um plano qualquer, passando por IJ, corta as perpendiculares ao plano (π), formando um quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1$ correspondendo a A, $B_1$ a B, $C_1$ a C e $D_1$ a D).

a) Determine a natureza do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ e estabeleça a relação existente entre as razões $\frac{\overline{AA_1}}{a}$ e $\frac{\overline{BB_1}}{b}$.

b) Supondo as razões iguais a k e AB igual a unidade, calcule os lados e as diagonais do quadrilátero em função de k, a e b.

4) (IME-82) Seja (T) um triângulo retângulo em A, sendo os outros vértices B e C.

a) Dá-se a razão $m = \frac{2p}{a}$, onde a é a hipotenusa e p o semiperímetro. Indique entre que valores m pode variar para que o problema tenha solução,e calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em função de m.

b) São dados a hipotenusa a de (T) e volume $V = \frac{\pi a^3}{48}$, gerado quando (T) gira em torno da hipotenusa. Calcule $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em graus ou o valor numérico de uma de suas linhas trigonométricas.

5) (IME-82) a) Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja MM' uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' se encontram em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a MM'.

b) Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma f (ε, ε') = 0, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

6) (IME-82) Em um plano ($\pi$) dá-se uma circunferência (c) de centro O e raio r. Por um ponto A pertencente a (c), tira-se a perpendicular a ($\pi$) e marca-se AV = x, V acima de ($\pi$).
a) Seja BD um diâmetro de (c): mostre que no tetraedro VABD os três pares de retas que ligam os meios das arestas opostas concorrem em um ponto, ponto esse que permanece fixo quando BD gira em torno de O.
b) Mostre que as arestas opostas de VABD são perpendiculares duas a duas.
c) Ache o lugar geométrico do pé da altura tirada de V no triângulo VBD, quando BD gira em torno de O.
d) Determine o centro e o raio da esfera circunscrita ao tetraedro VABD em função de r e x.

7) (IME-82) Sejam (k) e (k') os círculos das bases e O o centro do cilindro de raio R e altura h. No círculo (k), inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Um ponto A', pertencente ao círculo (k'), projeta-se paralelamente ao eixo do cilindro, em um ponto D do arco de (k) que subentende BC. Determine a posição de A' para que área do triângulo A'BC seja máxima, e nessa posição de A' calcule a distância de O (centro do cilindro) ao plano de A'BC.

8) (IME-82) Por um ponto C, ponto médio de um arco AB qualquer, de uma circunferência (k) de centro O (arco AB < 180º), traça-se a corda CDE, paralela ao raio AO (D intersessão de CDE com AB e E pertence a (k)). Determine o valor do ângulo AÔB (definido pelo valor numérico de alguma de suas linhas trigonométricas), para que o ponto D seja o ponto médio de CE.

# IME 1982/1983

**Matemática I**

1) (IME-83) Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto (1, 1) é proporcional à sua distância à reta $x + y = 0$

2) (IME-83) Dada a equação $2mx^2 - 3m - 2 = 0$, onde $m \in R$:
a) Determine m tal que uma raiz seja nula; calcula a outra raiz.
b) Mostre que a equação dada tem sempre duas raízes distintas.
c) Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

3) (IME-83) Seja F o conjunto das funções de R em R que satisfazem $f(xy) = f(x) + f(y)$. Dados $f \in F$ e $a \in R$ define-se a função $g_a$: $R \rightarrow R$ tal que $g_a(x) = f(ax) - f(x)$.
a) Mostre que $f(1) = 0$, $\forall f \in F$.
b) Mostre que $\forall a \in R$, $g_a$ é função constante.
Obs: Para o item (b), desenvolver $g_a(xy)$ e leve em conta o item (a).

4) (IME-83) Determine o polinômio p(x) do 4º grau, sabendo que $p''(x) = ax^2 + bx + c$ e que p(x) é divisível por p'' (x).

5) (IME-83) Dada a função y: $R \rightarrow R$ definida por $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$.

a) Estude a sua variação quanto a: continuidade, crescimento, assíntota e pontos notáveis, inclusive o ponto em que a curva corta a assíntota.
b) Faça o esboço do gráfico da curva representativa da função.
Obs: Para determinação da assíntota é conveniente colocar x em evidência para fora do radical e desenvolver a função pelo binômio de Newton.

6) (IME-83) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 8 | 7 | 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 9 |

7) (IME-83) Considere a função f definida nos reais por

$$f(x) = (x - 1)\ \ln|x - 1| - x \ln x :$$

a) Dê seu domínio e calcule $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.
b) Dada a função g definida nos reais por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \notin \{0,1\} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

verifique se g é contínua em x = 1 e se é derivável neste ponto.

8) (IME-83) Seja um determinante definido por

$$A_1 = |\ 1\ | \text{ e } \quad A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre $A_n$ e $A_{n-1}$).
b) Calcule a expressão de $A_n$ em função de n.

9) (IME-83) Seja m um inteiro positivo. Define-se uma relação $\theta_m$ por $R_{\theta_m} = \{(i\ , j) |\ i = j + km$, k inteiro$\}$.
Mostre que $\theta_m$ é uma relação de equivalência.

10) (IME-83) Seja $S_n = \sum\limits_{1}^{n} a_n$ onde os $a_n$ são complexos. Os módulos dos $a_n$ estão em progressão geométrica. Os argumentos dos $a_n$ estão em progressão aritmética. São dados:

$$a_1 = 13{,}5(\sqrt{3} + i)$$

$$a_4 = \frac{i\sqrt{3} - 1}{2}$$

Calcula-se o $\lim_{n\to\infty} S_n$.

**Matemática II**

1) (IME-83) Mostre que o lado do icoságono regular convexo é igual à diferença, dividida por $\sqrt{2}$, entre o lado do decágono regular estrelado e o lado do pentágono regular convexo. Todos os três polígonos estão inscritos em um mesmo círculo de raio r.

2) (IME-83) Dada a equação

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-m.\text{sen}^2x=0,$$

determine a condição a que deve satisfazer m para que ela tenha pelo menos uma solução $x_0$, tal que < $x_0$ < $2\pi$.

3) (IME-83) Consideram-se todos os pares de pontos do espaço M, M', tais que ângulo MÔM' = 90º, sendo O um ponto fixo dado.
a) Qual o lugar geométrico de M', sendo M e M' variáveis, porém fixo o ponto médio I, de MM'?
b) Considere outro ponto fixo O', tal que também MÔ'M' = 90º. O ponto M sendo fixo, obtenha o lugar geométrico de M'.

4) (IME-83) Em um triângulo ABC dão-se o ângulo Â, o raio do círculo ex-inscrito $r_a$ (relativo ao ângulo Â) e a altura há (relativa ao lado a).
a) Indique a construção do triângulo ABC e conclua daí a condição que deve haver entre os elementos dados para que a construção seja possível, isto é, para que exista o triângulo ABC, escaleno.
b) Deduza as expressões de a, b.c e de b + c, em função dos elementos dados.

5) (IME-83) É dada uma elipse de eixo focal 2a e excentricidade igual a $\sqrt{2/3}$. Essa elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é β = 45º. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

6) (IME-83) São dados duas superfícies cônicas de revolução, congruentes e de eixos paralelos. Seccionam-se essas duas superfícies por dois planos $\pi$ e $\pi'$ perpendiculares ao eixo de revolução, passando cada qual pelo vértice de uma das superfícies. Designam-se por (c) e (c') os cones resultantes situados entre dois planos. Seja h a distância entre $\pi$ e $\pi'$. Cortam-se (c) e (c') por um terceiro plano $\sigma$, paralelo a $\pi$ e $\pi'$, a uma distância variável x de $\pi$.
a) Mostre que a soma dos perímetros das seções (k) e (k'), determinadas por σ em (c) e (c') é constante.
b) Determine x de forma que a soma das áreas das duas seções (k) e (k') seja igual ao produto de um número real m pela área base de um dos cones (c) ou (c'). Entre que valores poderá variar m?

7) (IME-83) Dados dois círculos externos de raios distintos, mostre que o conjunto de secante que determinam em ambos cordas iguais, é tal que, cada uma dessas secantes é tangente a uma parábola, que se pede identificar.

8) (IME-83) Uma pirâmide de vértice v e base ABCD constitui a metade de um octaedro regular de aresta a.
a) Determine em função de a, os raios das esferas medial (esfera que passa pelos pontos médios das arestas deste poliedro), circunscrita e inscrita.
b) Marcam-se sobre VA e VB os segmentos VA' = VB' = x ; marcam-se sobre VC e VD os segmentos VC' = VD' = y; Supõe-se que x e y variam sob a condição de x + y = a. Determine x e y, em função de a, de forma que a área do quadrilátero A' B' C' D' seja igual a $a^2/4$.

# IME 1983/1984

**Matemática I**

1) (IME-84) Seja log *a* o logaritmo decimal de a e $\log_3 a$ o logaritmo de *a* base 3. São dados: log 2 = α e log 3 = β. Calcula em função de α e β os valores de log N e log3 N onde

$$N = 243\sqrt[4]{\frac{364,5}{\sqrt[3]{2}}}$$

2) (IME-84) Determine o polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que p (x) = p(1 – x), p(0) = 0 e p (– 1) = 6.

3) (IME-84) Quais as relações entre os coeficientes reais a, b, c, d da equação $X^2 + 2(a + ib)x + c + id = 0$ de modo que ela seja satisfeita para um valor real x = k?
Obs: $i^2 = -1$

4) (IME-84) Determine os valores de m para os quais as quatro raízes da equação biquadrada $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ sejam reais e estejam em progressão aritmética.

5) (IME-84) Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

6) (IME-84) Seja o desenvolvimento $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ onde n é um inteiro positivo. Determine n sabendo-se que maior dos coeficientes é o do termo em $x^{n-9}$.

7) (IME-84) São dadas duas retas paralelas r e r e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos da reta AA, vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A pertence a r . Sabe-se que:
Distância de O a r : d.
Distância de O a r : p.
Distância de r a r : p – d.

8) (IME-84) Dada a função definida nos reais por $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$
a) Estude a sua variação quanto a: continuidade e possível simetria de sua representação, crescimento ou decrescimento, extremos, inflexões e assíntotas.
b) Faça o esboço gráfico da curva representativa da função.

9) (IME-84) Seja D o determinante da matrix A = $[a_{ij}]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = i - j$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

10) (IME-84) Dada a matriz M = $(m_{ij})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o conjunto A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, define-se em A uma relação R por:

$$a_i \, R \, a_j \iff m_{ij} = 1$$

Verifique se R é uma relação de equivalência.

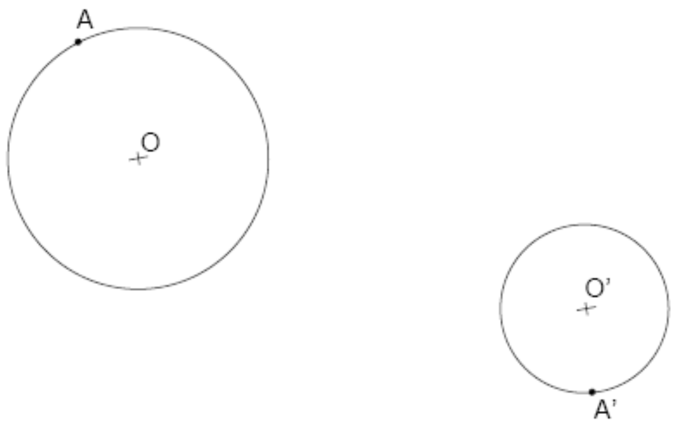
**Matemática II**

1) (IME-84) Um triângulo equilátero ABC, de lado a, gira em torno de um eixo XX' de seu plano, passando por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada pelo triângulo e designado por $\theta$ o ângulo X ÂB, pede-se determinar os valores de $\theta$ para que:

a) S seja máximo.
b) S seja mínimo.
c) $S = 3\pi a^2$.

Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.

2) (IME-84) a) São dados dois círculos C(O,r) e C'(O', r'), um ponto fixo A sobre C e um ponto fixo A' sobre C'. Traçam-se cordas paralelas AB e A' B' nos círculos C e C', respectivamente. Determine e direção destas cordas para que o produto AB.A'B' seja máximo.




b) Dar-se um triângulo ABC. De um ponto P variável (e não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo) traçam-se retas PB e PC. Sejam L e M os pés das perpendiculares de A a estas retas. Com a variação de P, o comprimento LM também varia. Qual o comprimento máximo de LM?

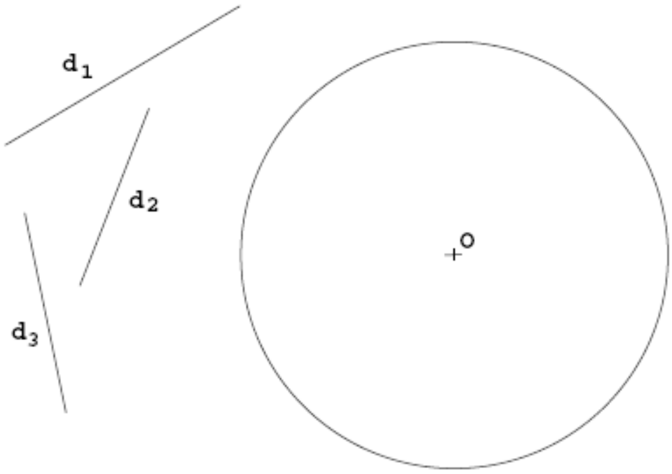
Obs: Para resolver este item não é necessário determinar a posição de P, correspondente a este máximo de LM.

3) (IME-84) Sejam $\ell$ o lado de um polígono regular de n lados, r e R, respectivamente, os raios dos círculos inscritos e circunscritos a este polígono. Prove que

$$r + R = \frac{\ell}{2}\cot\frac{\pi}{2n}$$

4) (IME-84) Um paralelepípedo tem a base ABCD sobre um plano horizontal e as arestas verticais são AA', BB', CC' e DD'. As três arestas concorrentes AB = a, sendo $a > b > c$. Um plano secante corta a aresta AB em seu ponto médio M, a aresta BB' no ponto N, tal que $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$ e a aresta B'C' em P, tal que B'P = x, com $0 < x \leq b$. Pede-se estudar a forma das seções obtidas pelo plano secante m M N P no paralelepípedo, quando a distância x varia nas condições dadas.

5) (IME-84) Dão-se um círculo (c), de centro O, e três direção $d_1$, $d_2$ e $d_3$. Inscreva em (c) os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções $d_1$, $d_2$ e $d_3$ e cujas vértices A, B e C se sucedem no círculo (c), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.



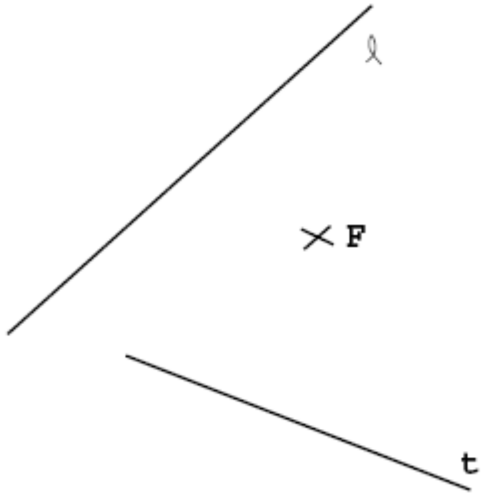

6) (IME-84) Dão-se um quadrado de vértices A, B, C e D e o seu centro O. Mostre que os incentros dos triângulos, cujos vértices são cada 3 pontos não colineares deste conjunto de 5 pontos, são vértices de um polígono regular convexo e calcule, em função do lado $\ell$ do quadrado, o raio do círculo no qual está inscrito o polígono.

7) (IME-84) a) São dados um cone de revolução de vértice V, cuja geratriz faz com o eixo do cone um ângulo β e uma elipse de semieixos a e b.

(1) Mostre que esta elipse pode ser sempre obtida como seção plana do cone dado.

(2) Sendo AB o traço do plano secante com o plano meridiano AV B, que lhe é perpendicular, demonstre a relação V A. V B = $b^2$ cossec$^2$ β.

b) Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota ($\ell$) e uma tangente (t). Pede-se determinar graficamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.




8) (IME-84) a) Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que os dois pares de lados opostos não são paralelos; AB encontra CD em E e AD encontra BC em F. Sejam L, M e N os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF, respectivamente. Prove que L, M e N são colineares.
b) Dá-se um quadrilátero convexo inscritível em círculo, cujos lados são cordas deste círculo e de comprimentos a, b, c e d e que se sucedem na ordem a, b, c, d.
(1) Calcule, em função de a, b, c, d os comprimentos das diagonais x e y.
(2) Permutando a ordem de sucessão das cordas, deduza, com auxílio de figuras, se as diagonais dos novos quadriláteros obtidos têm comprimentos diferentes de x e de y.
(3) Sabendo-se que a área de um quadrilátero inscritível é $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ e supondo que o quadrilátero, além de inscritível também é circunscritível, mostre que a fórmula de sua área reduz a $S = \sqrt{abcd}$ .

9) (IME-84) Determine os ângulos de um triângulo, dados o perímetro $2_p$, o lado *a* e a altura correspondente ao lado a, $h_a$.

10) (IME-84) Determine o lugar geométrico do vértice V de um triedro cujas faces medem 60º cada e cujas arestas tangenciam uma esfera (e) dada, de raio r e centro O.

11) (IME-84) Numa circunferência são dadas uma corda fixa AB, igual ao lado do triângulo equilátero inscrito e uma corda móvel C D, de comprimento constante e igual ao lado do dodecágono regular convexo inscrito. As duas cordas são os lados opostos de um quadrilátero convexo inscrito ABCD. Determine o lugar geométrico do ponto de encontro dos outros dois lados, especificando a delimitação deste lugar.

12) (IME-84) Obtenha uma relação entre a, b e c, eliminando x entre as duas equações abaixo:

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \cos 2x$$

# IME 1984/1985

**Matemática I**

**1)** (IME-85) Sejam as funções: $Z = \dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$ e $Y = \sqrt{1-x^4}$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas: $\dfrac{dZ}{dY} = \dfrac{Z}{x^2}$

**2)** (IME-85) Encontre o valor de $k$ para que a reta determinada pelos pontos $A(0,3)$ e $B(5,-2)$ seja tangente a curva $y = \dfrac{k}{x+1}$ para $x \neq -1$.

**3)** (IME-85) Determine o valor de $b$ tal que $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$, onde $p = b^{(t+1)2^t}$ .

**4)** (IME-85) Seja $A$ uma relação definida sobre os reais, contendo os pontos pertencentes as retas $y = \dfrac{x}{2}$ e $y = 2x$. Determine os pontos que necessariamente devem pertencer à $A$ para que $A$ seja transitiva.

**5)** (IME-85) Sejam $Z_1$ e $Z_2$ complexos de raios vetores $OP_1$ e $OP_2$, respectivamente. Mostre que $OP_1$ e $OP_2$ são perpendiculares se, e somente se, $Z_1\overline{Z_2}$ é um imaginário puro.

**6)** (IME-85) Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas:

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n \in R,\ n = 0,1,\ldots,n;\ a_n \neq 0$.

Mostre que a derivada $f'(x)$ possui também todas as suas raízes reais e distintas.

**7)** (IME-85) Seja a sequência $\{v_n\},\ n = 1,2,\ldots,$ definida a partir de seus dois primeiros termos $v_0$ e $v_1$ e pela fórmula geral: $V_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Define-se uma nova sequência: $\{u_n\},\ n = 1,2,\ldots$ pela fórmula $v_n = 3^n u_n$:

**(A)** Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de $u_0$ e $u_1$

**(B)** Calcule $u_n$ e $v_n$ em função de $n$, $v_0$ e $v_1$.

**(C)** Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando $v_1 = 1$ e $v_0 = \dfrac{1}{3}$.

**8)** (IME-85) Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, oito pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

**9)** (IME-85) Um exame de Vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

**10)** (IME-85) Uma reta $m_1$ passa pelo ponto fixo $P_1(-1;3)$ e intercepta a reta $m_2: 3x+2y-6=0$ no ponto $A$ e a reta $m_3: y-3=0$ no ponto $B$. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo $AB$ a medida que a reta $m_1$ gira em torno do ponto $P_1$.

**Matemática II**

**1)** (IME-85) Dá-se um triângulo retângulo isósceles de catetos $AB = AC = \ell$. Descreve-se um quarto de círculo $Q$ de centro $A$, ligando os vértices $B$ a $C$. Com diâmetro $BC$, descreve-se um semicírculo $S$ exterior ao triângulo e que não contém $A$. Traçam-se duas semicircunferências de diâmetros $AB$ e $AC$, $S_B$ e $S_C$, ambas passando pelo ponto $D$, meio de $BC$. Seja $M$ a superfície compreendida entre $Q$ e $S$. Seja $N$ a superfície compreendida entre $Q$ e arco $BD$ de $S_B$ e o arco $CD$ de $S_C$. Seja $P$ a superfície limitada pelos arcos $AD$ de $S_C$ e $AD$ de $S_B$.

Demonstre que:

**(A)** A área $M$ é igual a área do triângulo $ABC$.

**(B)** As áreas $N$ e $P$ são iguais.

**2)** (IME-85) Em um triângulo $ABC$ são dados o lado $a$, a soma dos outros dois lados, $b+c=\ell$, e a área S.

**(A)** Construa com régua e compasso.

**(B)** Calcule os ângulos $A$, $B$ e $C$ e os lados $b$ e $c$.


**3)** (IME-85) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice $V$ e base $ABCDEF$, de lado da base igual a $\ell$ e altura $h$, determine em função de $\ell$ e $h$, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

**4)** (IME-85) Em um plano π dá-se uma circunferência de centro $O$ e raio $r$, um ponto fixo $A$ sobre ela e um diâmetro variável $BC$ tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja igual a $\theta$ ($0 \le \theta \le \pi/2$ ). Sobre a perpendicular a π em $A$, marca-se um ponto $V$ tal que $AV = 2r$. Considere-se um tetraedro $ABCV$.

**(A)** Calcule em função de $r$ e $\theta$ as arestas do tetraedro.

**(B)** Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando $\theta$ varia.

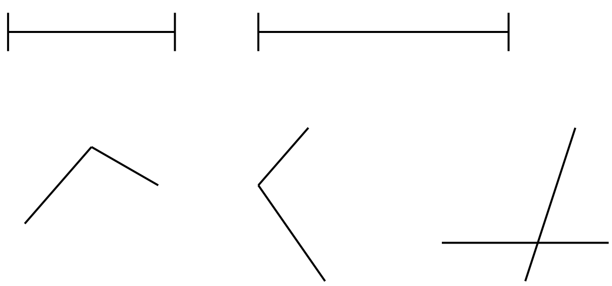
**(C)** Qual o lugar geométrico do ponto $H$ de π, pé da altura $VH$ do triângulo $VBC$?
**(D)** Para que posição de $BC$ a área do triângulo $VBC$ é máxima e qual o valor desse máximo?
**(E)** Calcule em função de $\theta$, a tangente $\alpha$, onde $\alpha$ é igual ao ângulo $V\hat{H}A$.
**(F)** Deduza o valor de $\theta$ que corresponde ao mínimo do diedro de aresta $BC$.
**(G)** Calcule $\theta$ para que se tenha tangente $\alpha$ a $4/\sqrt{3}$.

**5)** (IME-85) Dá-se um plano π e dois pontos $A$ e $B$ não pertencentes a π, situados em um semi-espaço de π, sendo:
**( I )** $AB = \ell$
**( II )** $a$ e $b$ as cotas de $A$ e $B$ em relação a π.
**( III )** $a < b$.
Determine um triângulo $ABC$ isósceles, retângulo em $C$, tal que o vértice $C$ pertença ao plano π. Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

**6)** (IME-85) **(*A*)** Dá-se $P$ uma parábola de foco $F$ e diretriz $d$. Sejam $M$ um ponto qualquer de $P$; $M_1$ sua projeção sobre $d$; $M_2$ a projeção de $M_1$ sobre $FM$. Identifique o lugar geométrico de $M_2$ quando $M$ descreve a parábola $P$.
**(*B*)** Em uma hipérbole $H$ são dados um foco $F$ e a diretriz correspondente $d$, que distam entre si $5\ cm$. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30º com o eixo focal. Pede-se: calcular os valores dos semieixos de $H$.

**7)** (IME-85) Em um triângulo $ABC$ retângulo em $A$, é dada a razão $k$ entre o produto das bissetrizes internas dos ângulos $B$ e $C$ e o quadrado da hipotenusa. Calcule $B$, em função de $k$. Determine entre que valores pode variar a razão $k$ para que o problema tenha solução.

**8)** (IME-85) **(*A*)** Construa um quadrilátero convexo $ABCD$, dados: os comprimentos das diagonais $AC$ e $BD$; o ângulo de $AC$ com $BD$, os ângulos adjacentes $A$ e $D$.



**8)** **(*B*)** São dados dois círculos concêntricos, $C_1$ e $C_2$ de raios $r_1$ e $r_2$ $(r_1 > r_2)$ e centro $O$. Por um ponto $A$ de $C_1$ determine uma corda $AD$ de $C_1$, que corta $C_2$ em $B$ e $C$, tal que $AD = 3BC$. Discuta a possibilidade e o número de soluções.

**9)** (IME-85) Seja um triângulo acutângulo $A_1A_2A_3$. Traça-se um círculo de diâmetro $A_2A_3$ e de $A_1$ traçam-se tangentes a ele, com pontos de contato $T_1$ e $T'_1$. Analogamente procede-se com os lados $A_3A_1$ e $A_1A_2$, obtendo-se os pontos de contato $T_2$, $T'_2$ e $T_3$, $T'_3$. Mostre que os seis pontos de contato obtidos pertencem a um círculo de centro $G$ (baricentro de $A_1A_2A_3$)

**10)** (IME-85) Dá-se um plano horizontal $\pi$, um de seus pontos $O$ e a vertical em $O$, $OV$. A cada ponto $P$ de $\pi$ faz-se corresponder um ponto $P_1$ sobre a vertical em $P$, tal que $\frac{PP_1}{OP} = k$ (constante). Com essa correspondência, p transforma-se em uma superfície $S$.

**(A)** Deduza a natureza de $S$, as seções de $S$ por planos passando por $OV$ e as seções de $S$ por planos perpendiculares a $OV$; identifique o plano tangente a $(S)$ em um ponto qualquer $P_1$.

**(B)** De um ponto $Q$ fixo sobre $OV$ tal que $OQ = h$, traça-se uma perpendicular sobre $OP_1$: considera-se a esfera $E$ de centro $Q$ e raio $QN$ ($N$ é o pé da perpendicular) sobre $OP_1$. Determine a curva comum a $E$ e a $S$ e calcule o volume compreendido entre $E$ e $S$

# IME 1985/1986

**Matemática I**

**1)** (IME-86) Determine $\log_{\sqrt{0,333\ldots}} \sqrt{0,037037\ldots}$

**2)** (IME-86) No produto abaixo, o "*" substitui algarismos diferentes de "3" e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

```
  **3*
   **3
 ------
  3***
 ***33
 ****
 ------
 *****
```

**3)** (IME-86) Seja $N^*$ o conjunto dos números naturais não nulos e $n \in N^*$. Mostre que a relação $R_n = \{(a,b) / a,b \in N^*$ e $|a-b|$ é múltiplo de $n\}$ é uma relação de equivalência.

**4)** (IME-86) Uma padaria trabalha com 4 tipos de farinha cujos teores de impureza são os seguintes:

| Tipo | Teor |
|---|---|
| A | 8% |
| B | 12% |
| C | 16,7% |
| D | 10,7% |

Para fabricar farinha do tipo D, o padeiro mistura uma certa quantidade de farinha A com 300 gramas de farinha tipo B; em seguida, substitui 200 gramas dessa mistura por 200 gramas de farinha tipo C.

Determine a quantidade de farinha tipo A utilizada.

**5)** (IME-86) A derivada de ordem $n$ de uma função $y = f(x)$ é a primeira derivada da derivada de ordem $n-1$ da mesma função, ou seja: $y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}$.

Calcule $[(x^2+1)\operatorname{sen} x]^{20}$.

**6)** (IME-86) Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

com as retas de coeficientes angular igual a $1/2$.

**7)** (IME-86) Seja a curva representada pela equação

$$y = \frac{w\ell}{1+w\ell} + \frac{1}{1+w\ell}\sum_{i=1}^{4}\frac{w}{w+\lambda_i},$$

onde $\ell, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e $\lambda_4$ são constantes reais tais que $1 > \lambda_{i+1} > \lambda_i > \ell > 0$. Esboce o gráfico de $y$, caracterizando as assíntotas, num sistema cartesiano ortogonal.

**8)** (IME-86) Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

**9)** (IME-86) Sabendo-se que $x$ é um número real, $-1 \le x \le 1$, $0 \le \arccos x \le \pi$ e $n$ é um número inteiro positivo, mostre que a expressão $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pode ser desenvolvida como um polinômio em $x$, de grau $n$m cujo coeficiente do termo de maior grau é igual $2^{n-1}$.

**10)** (IME-86) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

**Matemática II**

**1)** (IME-86) Seja um paralelepípedo retângulo de bases $ABCD$ e $A'B'C'D'$, cujas arestas $AA'$, $BB'$, $CC'$ e $DD'$ tenham por comprimento $h$ e os lados da base sejam, respectivamente, $AB = a$ e $AD = b$.

Por $DD'$ considere dois planos $DD'MN''$ e $DD'NN'$.

**( 1 )** Determine as distâncias $AM = x$ e $CN = y$ para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em $3$ partes de mesmo volume.

**( 2 )** Determine a razão entre os volumes dos sólidos $MBNM'B'N'$ e $MDNM'D'N'$.

**( 3 )** Encontre a relação entre $a$ e $b$, que estabeleça a condição necessária e suficiente para que o diedro de arestas $MM'$, cujas faces passem por $DD'$ e $NN'$ seja reto

**2)** (IME-86) Seja um triângulo $ABC$, retângulo em $A$. Por $B$, traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo. Sobre esta, fixa-se um ponto $S$. Por $B$, passa-se um plano que intercepta $SC$ em $C'$ e seja perpendicular a $SC$. O plano corta $SA$ em $A'$. Demonstre que os cinco pontos $A$, $B$, $C$, $A'$ e $C'$ pertencem a uma mesma esfera.

**3)** (IME-86) Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a $R$ e $r$, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas. Calcule a área da superfície lateral do tronco do cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

**4)** (IME-86) Dados dois pontos fixos $A$ e $B$ $\left(\overline{AB} = d\right)$, considere as elipses passando por $B$, com foco em $A$ e eixo maior de comprimento $2a$, tal que $2a > d$.
**( 1 )** Determine o lugar geométrico do segundo foco $F$ das elipses.
**( 2 )** Determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos $ABF$.

**5)** (IME-86) Considere um triângulo $ABC$ qualquer e três pontos $X$, $Y$ e $Z$, tais que $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Considere os círculos $C_1$, $C_2$ e $C_3$ que passam respectivamente pelos pontos $CXY$, $AYZ$ e $BXZ$.
Demonstre que $C_1$, $C_2$ e $C_3$ se encontram em um ponto $W$.

**6)** (IME-86) **( 1 )** – Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ele, da mediana correspondente.
**( 2 )** – Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros $O_1$ e $O_2$ e raios respectivamente iguais a $R_1$ e $R_2$, em pontos diametralmente opostos.

**7)** (IME-86) Resolva a equação:

$$m \cos x - (m+1) \operatorname{sen} x = m, \; m \in \Re$$

Determinando $m$ de modo que essa equação admita raízes $x'$ e $x''$ cuja diferença seja $\pi/2$.

**8)** (IME-86) Num triângulo $ABC$ $(\hat{A} > \hat{B} > \hat{C})$ traçam-se as bissetrizes externas $AA'$ do ângulo $\hat{A}$, com $A'$ sobre o prolongamento de $BC$ e $CC'$ do ângulo $\hat{C}$, com $C'$ sobre o prolongamento de $AB$. Se $AA' = CC'$ mostre que: $c \operatorname{sen} \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = a \operatorname{sen} \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$

**9)** (IME-86) Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

**10)** (IME-86) Seja uma parábola de foco $F$ e diretriz $d$. Por um ponto $P \in d$, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em $M_1$ e $M_2$. Demonstre que $M_1$, $M_2$ e $F$ estão em linha reta.

# IME 1986/1987

**Matemática I**

**1)** (IME-87) Dois números complexos $Z_1$ e $Z_2$, não nulos, são tais que $|Z_1+Z_2|=|Z_1-Z_2|$. Mostre que $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ é imaginário puro.

**2)** (IME-87) Determine as soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=70 \\ (x+y)\cdot(x^2+y^2)=203 \end{cases}$$

**3)** (IME-87) Dados dois conjuntos $A$ e $B$, define-se $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$. Prove que dados 3 conjuntos arbitrários $X$, $Y$ e $Z$:

$$X\cap(Y\Delta Z)=(X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$$

**4)** (IME-87) Dados um sistema de eixos ortogonais $XOY$ e um ponto $A$, de coordenadas $(x_0;y_0)$, $(x_0;y_0)\neq 0$, considere dois pontos variáveis $P$ e $Q$, $P$ pertencente ao eixo $OX$ e $Q$ pertencente ao eixo $OY$, tais que a área do triângulo $APQ$ seja constante e igual a $K$, $K\in\Re$. Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento $PQ$.

**5)** (IME-87) Seja uma função de variável real definida por $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+3)$ onde $\ln$ é o logaritmo neperiano.

**(A)** Calcule o domínio e a imagem de $f$.

**(B)** Determine uma função $\gamma(x)$ com $\lim\limits_{x\to\infty}\gamma(x)=0$, tal que $f(x)=2x+\gamma(x)$, para todo $x$ pertencente ao domínio de $f$.

**(C)** Faça o gráfico de $f(x)$, indicando seus mínimos e máximos relativos e suas assíntotas.

**6)** (IME-87) Seja $f$ uma função bijetora de uma variável real e a relação $h$, definida por

$$h:\Re^2\to\Re^2$$
$$(x;y)\to\left(x^3;x-f(y)\right)$$

Verifique se $h$ é bijetora e calcule uma relação $g$ tal que:

$$g\circ h(x;y)=(x;y)$$
$$h\circ g(x;y)=(x;y),\ \forall x,\forall y\in\Re$$

**7)** (IME-87) Sejam $a$, $b$ e $c$ números inteiros tais que $100a+10b+c$ seja divisível por 109. Mostre que $(9a-c)^2+9b^2$ também é divisível por 109.

**8)** (IME-87) Mostre que para todo número natural $n$ maior ou igual a $2$, $2^{\frac{5n}{4}}\leq\binom{2n}{n}$

**9)** (IME-87) Sejam $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} i & j & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix}$ duas matrizes de elementos inteiros. Verifique se a matriz $AB$ é inversível.

**10)** (IME-87) Seja $p(x)$ um polinômio de grau $16$ e coeficientes inteiros.
**(A)** Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x=0$ e $x=1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.
**(B)** Sabendo-se que $p(x)=7$ para quatro valores de $x$, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de $x$, $p(x)$ assume o valor $14$?

**Matemática II**
**1)** (IME-87) Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos $ABC$ e $ACD$ tem, com a diagonal $AC$, um mesmo ponto em comum.

**2)** (IME-87) Resolva a inequação:
$\dfrac{2\cos x + 2\,\text{sen}\, x + \sqrt{2}}{\cos x - \text{sen}\, x} < 0$.

**3)** (IME-87) Sobre uma reta $r$ marcam-se, nesta ordem, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$. Em um dos semiplanos determinados por $r$, traçam-se as semicircunferências de diâmetro $AB$, $CD$ e $AD$; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetro $BC$.
Calcule a razão entre a área definida por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semicircunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos $A$, $B$, $C$ e $D$.

**4)** (IME-87) Seja uma hipérbole equilátera de centro $O$ e focos $F$ e $F'$. Mostre que o segmento determinado por $O$ e por um ponto $M$ qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos $MF$ e $MF'$.

**5)** (IME-87) Dado um triângulo $ABC$ de lados $a$, $b$ e $c$ opostas aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ respectivamente e de perímetro $2p$, mostre que: $a=\dfrac{p\,\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}}{\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}}$.

**6)** (IME-87) Sejam duas circunferências, não ortogonais, de centros $O$ e $O'$ que se interceptam em $A$ e $B$. Sendo $D$ e $D'$ os pontos onde as retas $O'A$ e $OA$ interceptam, respectivamente, as circunferências de centro $O$ e $O'$, demonstre que o pentágono $BODD'O'$ é inscritível.

**7)** (IME-87) Num plano $\pi$ tem-se um retângulo $ABCD$ de dimensões $AB=2a$ e $AD=a$. Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a $\pi$,

passando por $A$, $B$, $C$, $D$ e um ponto $C'$, sobre a aresta traçada por $C$, tal que $CC' = b$. Seccionando-se esta superfície por um plano passando por $AC'$:
**(A)** Mostre que é possível obter-se para seção plana um losango $AB'C'D'$, onde $B'$ e $D'$ são pontos das arestas que passam, respectivamente, por $B$ e $D$.
**(B)** Determine, em função de $a$ e $b$, uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semiespaço em relação ao plano $\pi$.
**(C)** Calcule o volume do tronco de prisma $ABCDB'C'D'$, supondo satisfeitas as condições do item anterior

**8)** (IME-87) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice $V$ e base $ABCDEF$, de lado da base igual a $\ell$ e altura $h$:
**(A)** Mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
**(B)** Calcule os raios dessas esferas.
**(C)** Mostre que o produto desses raios independe de $h$.

**9)** (IME-87) Sejam duas ortogonais $r$ e $r'$, não coplanares. Considere sobre $r$ dois pontos fixos $A$ e $B$ e sobre $r'$ dois pontos variáveis $M$ e $M'$, tais que a projeção de $M'$ sobre o plano que contém o triângulo $MAB$ é o ortocentro $H$ deste triângulo.
Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro $ABMN'$.

**10)** (IME-87) Sejam $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e $M$ um ponto qualquer sobre o arco $AE$.
Unindo-se $M$ a cada um dos vértices do pentágono, mostre que os segmentos $MB + MD = MA + MC + ME$.

# IME 1987/1988

**Matemática I**
**1)** (IME-88) Determine o valor de $a$ para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o neste caso.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

**3)** (IME-88) Para que valores de $x$ a função $f(x) = |x|^{\frac{1}{\ln x^4}} \cdot \ln x^2$ assume o valor de $e^{1/4}$.
***Obs***. $\ln$ *denota logaritmo neperiano.*

**3)** (IME-88) **(A)** Mostre que se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_1 x^3 + a_0 x^4,$$

então existe um polinômio $g(x)$ do 2º grau, tal que $p(x) = x^2 g(x + x^{-1})$.
**(B)** Determine todas as raízes do polinômio

$$p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4.$$

**4)** (IME-88) Seja a função $f(x) = 6 \cdot \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$:

**(A)** Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de $f(x)$, caso existam.

**(B)** trace o gráfico desta função.

**5)** (IME-88) Considere a sequência cujos primeiros termos são: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Seja $a_n$ seu n-ésimo termo. Mostre que $a_n < \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$, para todo $n \geq 2$.

**6)** (IME-88) Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro, que possui com o círculo $x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0$ eixo radical $y - 2x - 5 = 0$.

**7)** (IME-88) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

**8)** (IME-88) Mostre que por todo ponto não situado sobre o eixo $OX$ passam exatamente $2$ parábolas com foco na origem e eixo de simetria $OX$ e que estas parábolas se interceptam ortogonalmente.

**9)** (IME-88) Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes $5 \times 5$ com elementos reais. Denotando-se por $A^t$ a matriz transposta de $A$:

**(A)** Mostre que se $A \cdot A^t = 0$, então $A = 0$.

**(B)** Mostre que se $B \cdot A \cdot A^t = C \cdot A \cdot A^t$, então $B \cdot A = C \cdot A$

**10)** (IME-88) Considere os seguintes conjuntos de números complexos:
$A = \{x \in \mathbf{C} / |z| = 1, \ \mathrm{Im}(z) > 0$ e $B = \{x \in \mathbf{C} / \mathrm{Re}(z) = 1, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$
onde $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ são as partes real e imaginária do número complexo $z$, respectivamente.

**(A)** Mostre que para cada $Z \in A$, o número $\frac{2z}{z+1}$ pertence a $B$.

**(B)** Mostre que para cada $\omega \in B$ pode ser escrito da forma $\frac{2z}{z+1}$ para algum $z \in A$.

**Matemática II**

**1)** (IME-88) Demonstre que. Num triângulo $ABC$:

$$ctg \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$$

**2)** (IME-88) Dado um círculo de raio $R$ e centro $O$, constrói-se 3 círculos iguais de raios $r$, tangentes dois a dois, nos pontos $E$, $F$, $G$ e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de $R$, o raio destes círculos e a área da superfície $EFG$, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos $EG$, $GF$ e $FE$.

**3)** (IME-88) Demonstre a identidade:

$$tg^2x + ctg^2x = 2\left(\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right)$$

**4)** (IME-88) Calcule o lado de um triângulo $ABC$, em função de sua área S, do ângulo $C$ e de $k = a + b - c$.

**5)** (IME-88) Secciona-se um cubo de aresta $a$ por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

**6)** (IME-88) Sobre os catetos $AB$, e $AC$ de um triângulo retângulo $ABC$, constroem-se dois quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Mostre que os segmentos $CD$, $BF$ e a altura $AH$ são concorrentes,

**7)** (IME-88) Considere um semicírculo de diâmetro $AB = 2R$. Por $A$, traça-se ume reta que forma um ângulo de 30º com o diâmetro $AB$ e que corta o semicírculo em $C$. Por $C$, traça-se a tangente ao semicírculo, que intercepta a reta que contém $AB$ no ponto $D$.
Fazendo-se uma rotação em torno da reta que contém $AB$, o semicírculo gera uma esfera $E$ e o triângulo $ACD$ gera um sólido $S$.
**(A)** Calcule o volume deste sólido $S$, em função do raio $R$.
**(B)** Seja $M$ um ponto sobre $AB$ tal que $AM = \frac{R}{3}$. Considere um plano $\pi$ passando por $M$ e perpendicular à reta $AB$, seccionando-se a esfera $E$ e o sólido $S$. Calcule a razão entre a área destas duas secções.

**8)** (IME-88) Dadas duas retas reversas $r$ e $s$, ortogonais e sua perpendicular comum $t$, que corta $r$ em $I$ e $s$ em $K$; considere um segmento $AB$, de comprimento constante, que se move apoiando suas extremidades $A$ e $B$, respectivamente sobre $r$ e $s$. Unindo-se $A$ a $K$ e $I$ a $B$, forma-se um tetraedro variável $ABIK$:
**(A)** Demonstre que a soma dos quadrados das arestas deste tetraedro é constante.
**(B)** Calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro. Em função da distância $AB$.

**9)** (IME-88) Seja o semicírculo de diâmetro $AB = 2R$ e $r$ sua tangente em $A$. Liga-se um ponto $P$ da reta $r$ ao ponto $B$, interceptando o semicírculo no ponto $C$.
**(A)** Demonstre que o produto $PB \cdot PC$ é constante.
**(B)** Determine o lugar geométrico do ponto médio de $AC$, quando $P$ desloca-se sobre a tangente.
**(C)** Seja $AP = \frac{PB}{2}$, calcule a área da porção do triângulo $PAB$, situada no exterior do semicírculo.

**10)** (IME-88) Considere as esferas cuja interseção com um plano $\pi$ é um círculo fixo $C$. Seja $r$ uma reta do plano $\pi$, exterior ao círculo. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato dos planos tangentes a tais esferas e que contém a reta $r$.

# IME 1988/1989

## Matemática I

1) (IME-89) Determine o coeficiente de $x^{-9}$ no desenvolvimento de: $\left(x^2 + \frac{1}{x^5}\right)^2 . \left(x^3 + \frac{1}{x^4}\right)^5$

2) (IME-89) Esboce o gráfico da função
$y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ assinalando os pontos críticos.

3) (IME-89) Um ponto se move de modo que, o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo.
Determine a equação da trajetória deste ponto; identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

4) (IME-89) Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica.
Somando os termos correspondentes das duas progressões obtém-se 85,76 e 84 respectivamente.
Encontre os termos destas progressões.

5) Dada a equação
$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m + 1)y + 3m + 14 = 0$
(a) determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.
(b) determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

6) (IME-89) Mostre que todas as raízes da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

7) (IME-89) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo, marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,
(a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?
(b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?
(c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?
(d) quantos tetraedros com todos os vértices em faces diferentes podem ser formados?
OBS: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

8) (IME-89) Calcule o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

9) (IME-89) Resolva o sistema: $\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$

10) (IME-89) Seja uma elipse cujo eixo maior AA' = 2a e cuja excentricidade é ½. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

## Matemática II

1) (IME-89) Resolva a seguinte desigualdade:

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2 \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$$

2) (IME-89) Numa circunferência de centro O e diâmetro AB = 2R, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que BM = R.
Traça-se uma secante MNS tal que MN = NS, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência.
Determine a área do triângulo MOS.

3) (IME-89) Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D, situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC; nestes triângulos AB = AC = a e AD = CD,
a) calcule a diagonal BD, do quadrilátero ABCD;
b) seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED;
c) seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

4) (IME-89) Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

5) (IME-89) Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade sen4A + sen4B + sen4C = 0, então o triângulo é retângulo.

6) (IME-89) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com AB = AC = a.
Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaço, em relação a este plano.
a) calcule a área total da pirâmide de vértice A e base BCC'B';
b) calcule o volume desta pirâmide;
c) mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera;
d) determine o centro e o raio desta esfera.

7) (IME-89) Seja ABCD um trapézio cuja base maior AB = a é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante, igual a b. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a $\ell$. Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I.
a) demonstre que o $\ell$.g. descrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica;
b) determine eixos e distância focal.

8) (IME-89) São dados um segmento AB e os pontos C e D, que o dividem, interna e externamente numa mesma razão. Mostre que as circunferências de diâmetro AB e CD são ortogonais.

9) (IME-89) Seja um quadrado de lado a e um ponto P, exterior ao quadrado. Chame de "ângulo sob o qual o quadrado é visto do ponto P" o menor ângulo com vértice em P, que contenha o quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, de onde o quadrado é visto sob um ângulo de 45º.

10) (IME-89) Seja ABCD um tetraedro regular de aresta a. Seja O o baricentro da face ABC. Efetua-se uma translação do tetraedro igual a $\frac{AO}{2}$ obtendo-se um novo tetraedro A'B'C'D'.

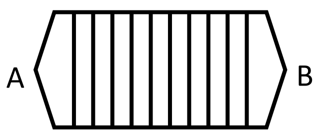
a) Determine o volume da esfera inscrita no sólido comum aos tetraedros ABCD e A'B'C'D'.
b) Determine o volume da esfera circunscrita a este sólido.

# IME 1989/1990

**Matemática I**

1) (IME-90) Calcule o determinante da matriz n x n que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

2) (IME-90) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão-dupla, ligam as duas estradas principais como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B.
OBS.: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.




3) (IME-90) Considere a família de retas representadas pela equação: $Y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$, onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.
a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.
b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

4) (IME-90) Considere as seguintes funções:
$f(x) = a^x$ onde $a > 1$
$g(x) = \sqrt{2px}$ onde $p > 0$
Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é: $a = e^{\frac{p}{e}}$
Neste case, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

5) (IME-90) Na elipse da excentricidade ½, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:
a) os vértices da elipse;
b) o outro foco;
c) a equação da outra reta diretriz.

6) (IME-90) Considere a função $f(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n + \frac{1}{x^n})^{1/n}$ definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor de f em cada ponto e esboce seu gráfico.

7) (IME-90) Resolva a equação: $z^5 = \bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z.

8) (IME-90) Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:
$f(1) = 1$

f(2n) = 2.f(n) + 1
f(f(n)) = 4n + 3
Calcule f(1990).

9) (IME-90) IMEBOL é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde a > b > c são inteiros positivos. Certo dia Marcos, Flávio e Ralph resolveram jogar IMEBOL e após algumas partidas a soma dos pontos foi :

Marcos - 20 Flávio - 10 Ralph - 9

Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

10) (IME-90) Para que valores de p a equação:
$x^4 + px + 3 = 0$, tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

**Matemática II**

1) (IME-90) Determine o valor de:

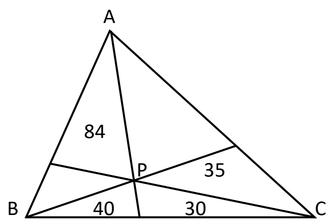
$$p = \text{sen}\,\frac{\pi}{24}\,\text{sen}\frac{5\pi}{24}\,\text{sen}\frac{7\pi}{24}\,\text{sen}\frac{11\pi}{24}$$

2) (IME-90) Seja $\overline{AB}$ um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de $\overline{AB}$ escolhemos um ponto P($\overline{PB} < \overline{PA}$). Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N$\left(\overline{PM} < \overline{PN}\right)$, de modo que $\overline{PM} = \overline{AN} = R$.
a) Mostre que a corda $\overline{MB}$ é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados.
b) Encontre a distância de P ao centro do círculo em função de R.

3) (IME-90) Considere uma esfera de raio R. Determine a figura geométrica à qual pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedros nos quais as três arestas estão tangentes a essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de 60º.

4) (IME-90) Dois círculos de raio R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

5) (IME-90) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.




6) (IME-90) Seja um segmento fixo AO de comprimento a e uma semi-reta variável Ox tal que AÔx = $\alpha$, o ângulo agudo, pertencentes a um plano fixo $\pi$. Seja a perpendicular ao plano $\pi$ em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que AB = a. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:
a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro OABC?
b) Calcule o comprimento das seis arestas de OABC em função de a e $\alpha$.
c) Calcule o volume v do tetraedro em função de a e $\alpha$.

d) Determine $\alpha$ de modo que v = $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).

e) Determine o volume comum aos dois sólidos encontros no item anterior.

7) (IME-90)
a) Obtenha a expressão para tg $3\alpha$ em função de tg $\alpha$ = x.
b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação: $x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$ onde m é um número real dado.

8) (IME-90) Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede $\ell$. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90º, calcule a razão entre os lados.

9) (IME-90) Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

10) (IME-90) Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

# IME 1990/1991

**Matemática I**
1) (IME-91) Determine todas as matrizes X reais, de dimensões 2 x 2, tais que AX = XA, para toda matriz A real 2 x 2.

2) (IME-91) Dado o conjunto A = {1,2,3,...,102}, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

3) (IME-91) A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

4) (IME-91) Mostre que o número $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ é irracional.

5) (IME-91)
a) Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \Re$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?
b) Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre as duas raízes.

6) (IME-91) Seja $D = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ e $F:D \to R^2$ uma função tal que $\forall$ $(x, y) \in D$ associa $(x, y) \in \Re^2$ onde: $\begin{cases} x = y \\ y = (1-y)x \end{cases}$

a) Sendo $T = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ mostre que F é uma bijeção de D sobre T.
b) Esboce a imagem dos conjuntos da forma $\{(x, y) \in D \mid y = \lambda x\}$ para os seguintes valores de $\lambda$: $\lambda_0 = \frac{1}{4}$; $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_2 = 1$.

7) (IME-91) Mostre que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

8) (IME-91) Dada a função racional:

$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ e sabendo que a, b, c, m, n, p $\in \mathbf{Z}$ e que:

1º) f(2) = 0

2º) Para x = -1 tem-se uma indeterminação do tipo 0/0.

3º) $\lim_{x \to -1} f(x) = -6$

4º) x = 1 é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$.

5º) $f(3) = \frac{1}{f(4)}$

Determine os coeficientes a, b, c, m, n, p.

9) (IME-91) Determine o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos A(1, 1); B(0, 2); C(-1, 1). Seja F(0,1) o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abcissas. Pede-se:

1) Mostre que (P) passa por A e C.
2) Determine a equação dessa parábola.
3) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com (P).
4) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abcissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (P) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}$ $(x + 1)^3(x-3)$.
5) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de (P) interiores a (P).

10) (IME-91)

a) A partir do estudo da variação do sinal das funções $f(x) = \ell n\,(1 + x) - x$ e $g(x) = \ell n\,(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ deduza a relação $x - \frac{x^2}{2} < \ell n(1 + x) < x$ . $\forall x \in (0, +\infty)$

b) Sendo $n \in \mathbf{Z}^+$, seja:

$P(n) = (1 + \frac{1}{n^2})\,(1 + \frac{2}{n^2}) \dots (1 + \frac{n-1}{n^2})$

Mostre que se $n \to \infty$, P(n) admite um limite e calcule esse limite.

**Matemática II**

1) (IME-91) Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP}$ = 3R.
a) Determine um diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.
b) Calcule, em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.
c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.
d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?
e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

2) (IME-91) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

3) (IME-91) Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que: $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

4) (IME-91) Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:
sen 2A + sen 2B + sen 2C = 4 sen A sen B sen C

5) (IME-91) Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação:
$\frac{\cos(B-C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}(C-B)} = \operatorname{tg} B$ então o triângulo é retângulo com ângulo reto A.

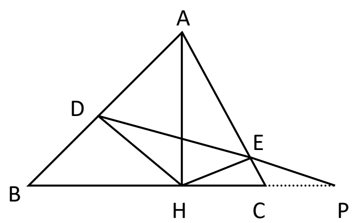
6) (IME-91) Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:
a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.
b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

7) (IME-91) Resolver o sistema: $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$

sabendo que x e y pertencem ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

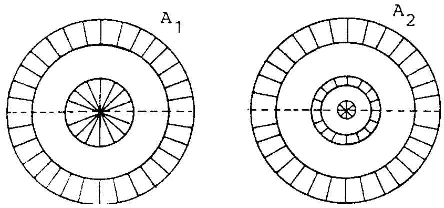
8) (IME-91) Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB}$ = 2R. Traçam-se: uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

9) (IME-91) Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$, $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção de DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados CA, AB. Demonstre que os pontos P, Q, R são colineares.




10) (IME-91) No plano, considere um disco de raio R chame este conjunto de $A_0$. Divida um raio de $A_0$ em três segmentos congruentes e retire de $A_0$ a coroa circular de raios $\frac{1}{3}$R e $\frac{2}{3}$R, chame este conjunto de $A_1$.

O conjunto $A_1$ contém um disco de raio $R_1 = \frac{1}{3}$R, divida um raio deste disco em três segmentos congruentes e, mais uma vez, retire de $A_1$ a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de $A_2$.
Continue esse processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



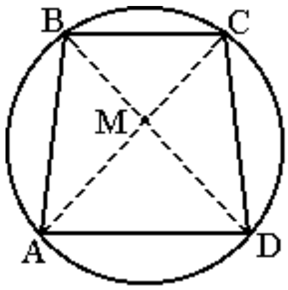

a) Calcule a área do conjunto $A_n$ obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.
b) Calcule a área do conjunto resultante A.

# IME 1991/1992

1) (IME-92) Prove que $\overline{Z_1 + Z_1} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, onde $Z_1$ e $Z_1 \in \mathbf{C}$.

2) (IME-92) Encontre todas as soluções de $\sec x - 2\cos x = 1$ em $[0, 2\pi]$.

3) (IME-92) Dado o quadrilátero $ABCD$, inscrito num círculo de raio $r$, conforme a figura abaixo, prove que: $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}$




4) (IME-92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

5) (IME-92) determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por: $4y^2 + 8y - x^2 = 4$, formando um ângulo de 45º com o eixo horizontal.

6) (IME-92) Dados:
**( 1 )** um cone de revolução com vértice $S$ e cuja base circular está situada num plano $\pi$.
**( 2 )** Um ponto $P$ exterior ao cone e não pertencente a $\pi$.
Pede-se: determinar, pelo ponto $P$, os planos tangentes ao cone.

7) (IME-92) A partir da função $R(t) = e^{-At} + \frac{A}{B-A}\left(e^{-At} - e^{-Bt}\right)$, onde $t$ é variável (tempo) e $A$ e $B$ são constantes reais, encontre a expressão de $R(t)$, para o caso em que $A$ tende a $B$ de modo que $R(t)$ seja uma função contínua.

8) (IME-92) Seja $f : [0, \infty[ \to \Re$ uma função contínua tal que:
**( 1 )** $f(0) = 0$

**( 2 )** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}, \forall x \in ]0, \infty[$

**( 3 )** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Pede-se:

**(A)** os intervalos onde $f$ é crescente (respectivamente, decrescente).

**(B)** Os intervalos onde o gráfico de $f$ é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).

**(3)** Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

Defina $g : \Re \to \Re$ por: $g(x) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ -f(x); x < 0 \end{cases}$. Esboce o gráfico de $g$.

9) (IME-92) Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

10) (IME-92) Sejam $E_0 = [0,1]$ e $f_1, f_2 : E_0 \to E_0$ funções definidas por $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x$ e $f_2(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$. Se $\mathrm{P}(E_0)$ é o conjunto das partes de $E_0$, seja $F : \mathrm{P}(E_0) \to \mathrm{P}(E_0)$ a função definida por $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, onde $f_i(A)$ é a imagem de $A$ por $f_i, i = 1,2$.

Agora, para cada $n \geq 1$ definimos $E_n F(E_{n-1})$.

**(A)** Esboce graficamente $E_0, E_1, E_2$ e $E_3$. Mostre que $E_n \subset E_{n-1}$.

**(B)** Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} |E_n|$, onde $|E_n|$ é a soma dos comprimentos dos intervalos que formam $E_n$

# IME 1992/1993

1) (IME-93) Considere a função f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são inteiros positivos. Sabendo-se que uma das raízes dessa função é igual a 2i, calcular os menores valores de a, b e c para que exista um ponto de máximo e um ponto de mínimo reais.

2) (IME-93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum. Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

3) (IME-93) Prove, por indução, que:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots \div C_n^n b^n$ Para $n \in N$

4) (IME-93) Indique se é verdadeiro (V) ou falso (F) o que se segue e justifique sua resposta.
a) O conjunto de números reais não têm pontos extremos reais;
b) Existe um número em Q (racionais) cujo quadrado é 2;
c) O ponto correspondente a $\frac{66}{77}$ na escala dos números reais $\Re$ está situado entre os pontos $\frac{55}{66}$ e $\frac{77}{88}$.

5) (IME-93) Determine o valor de x para que:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

6) (IME-93) Faça o que se pede:
a) Calcule o argumento do seguinte número complexo i(1+ i);
b) Escreva sob forma trigonométrica o número complexo $Z = 1 + i\sqrt{3}$

7) (IME-93) Considere uma função L: $\Re^+ \rightarrow \Re$ que satisfaz:
1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$;
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x$, $y > 0$.
Mostre que:
a) $L(1) = 0$;
b) $L(1/x) = -L(x)$, para todo $x > 0$;
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer $x$, $y > 0$;
d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural $n$;
e) $L(\sqrt[n]{x}) = L(x)/n$ para todo $x > 0$ e natural $n$;
f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

8) (IME-93) Demostrar analiticamente que se uma reta perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então, ela divide a corda no seu ponto médio.

9) (IME-93) Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

10) (IME-93) Resolva a equação
$\text{sen } x - \cos x = \text{sen } 2x - \cos 2x - 1$

# IME 1993/1994

1) (IME-94) Determine o termo independente de **x** de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

2) (IME-94) Seja f: R $\rightarrow$ R uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\forall x \in$ R. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são raízes e que $f(1) = -8$
Pede-se:
a) Determinar a, b, c
b) Calcular f(0)

c) Verificar se f(x) apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta
d) As coordenadas do ponto extremo
e) O esboço do gráfico

3) (IME-94) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

4) (IME-94) Considere os números complexos $z = x + y.i$ e $w = y - x.i$, cujos módulos são tais que $|z| = e^{|w|.\frac{\sqrt{3}}{x}}$ e $|w| = e^{|z|.\frac{1}{y}}$, onde **e** é base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de $z^2$ .

5) (IME-94) Um aluno, ao inverter a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{ij}] \text{ , } 1 \le i \text{ , } j \le 3$$

cometeu um engano, e considerou o elemento $a_{13}$ igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Com esse engano o aluno encontrou

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \text{. Determinar } A^{-1}$$

6) (IME-94) Seja $y = \frac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz **d**. Uma reta, cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos $M_1$ e $M_2$ , respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a $M_1$ e $M_2$. Pede-se:
a) As coordenadas de G em função de m
b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia

7) (IME-94) Sabendo que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade abaixo.

$$\text{sen}\hat{A} + \text{sen}\hat{B} + \text{sen}\hat{C} = 4\cos\frac{\hat{A}}{2}.\cos\frac{\hat{B}}{2}.\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

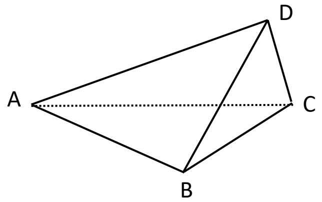
8) (IME-94) Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero MNPQ é circunscritível a um círculo com centro em I.

9) (IME-94) Seja C um semicírculo com centro O e diâmetro $PQ = 2\pi$. sobre o segmento OP, toma-se um ponto N tal que ON = x , $0 \le x \le r$. Por N traça-se uma reta perpendicular a PQ que encontre o semicírculo em M. A reta tangente ao semicírculo em M corta a reta PQ em um ponto T:
a) Calcule, em função de **r** e **x**, o volume $V_1$ gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de PQ.

b) Calcule, em função de **r** e **x**, o volume $V_2$ gerado pela rotação do triângulo MPT em torno de PQ.

c) Considerando a razão y = $\frac{V_2}{V_1}$, quando x varia no intervalo [0 , r], faça o esboço do respectivo gráfico.

10) (IME-94) Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos:
CD=10 $\sqrt{3}$ dm, CD é perpendicular ao plano ABC,
$A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60^o$ e $E\hat{D}C = 30^o$




Calcule esse volume.

# IME 1994/1995

1) (IME-95) Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

2) (IME-95) Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A, variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem à relação tg B tg C = k, k constante real. Discuta a solução para os diversos valores de k.
**Sugestão:** Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC.

3) (IME-95) Dado Z = $\frac{1}{\sqrt{7+24i}}$, calcule as partes real e imaginária de Z.

4) Sabendo-se que a função h(x) possui a seguinte propriedade $\frac{d}{dx}h(x) = -h(x)$, pede-se:

a) A solução da equação: $\int t\, f(t) = x\, h(x) + h(x) + 1$

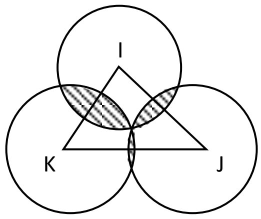
b) Os valores de c e h(x), de tal forma que: $\int_0^C t\, f(t) = \frac{2 - e}{e}$

5) Resolva a equação trigonométrica:
sen x + cos x + 2 $\sqrt{2}$ sen x cos x = 0

6) (IME-95) Use o teorema do valor médio para derivadas e prove que a equação:
$\ell n\,(x + 1)^5 + 3\, \ell n\,(x + 1)^3 + 2\, \ell n\,(x + 1) - 2 = 0$, tem uma única raiz real no intervalo (0, 1).

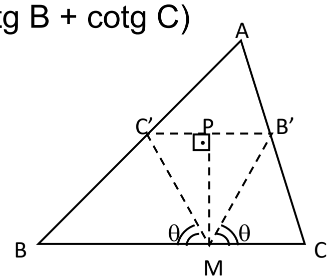
**OBS**: A notação $\ell$n significa logaritmo neperiano.

7) (IME-95) Três círculos de mesmo raio “R” se interceptam dois a dois, como é mostrado na figura abaixo, constituindo três áreas comuns que formam um trevo. Determine o perímetro do trevo e sua área em função de “R” e da área “S” do triângulo IJK.




8) (IME-95) Seja ABC um triângulo qualquer. Por B’ e C’ pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais $\theta$ conforme a figura abaixo. Demonstre que:

$\text{cotg } \theta = \frac{1}{2}(\text{cotg B} + \text{cotg C})$




9) (IME-95) Seis esferas idênticas de raio “R” encontram-se posicionadas no espaço de tal forma que cada uma delas seja tangente a quatro esferas. Desta forma, determine a aresta do cubo que tangencie todas as esferas.

10) (IME-95) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + ... + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$.

## IME 1995/1996

1) (IME-96) Considerando log 2 = a e log 3 = b, encontre, em função de a e b o logaritmo do número $\sqrt[5]{11{,}25}$ no sistema de base 15.

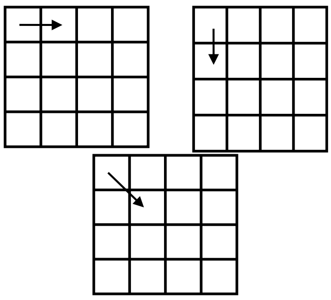
2) (IME-96) Encontre todas as soluções reais da equação apresentada abaixo, onde n e um numero natural: $\cos^n x - \text{sen}^n x = 1$

3) (IME-96) Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r. O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

4) (IME-96) Seja f uma função real tal que $\forall x, a \in \Re$: $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$. f é periódica? Justifique.

5) (IME-96) Calcule a soma abaixo:
$$\frac{1}{1.x4} + \frac{1}{4x7} + \frac{1}{7x10} + \ldots + \frac{1}{2998x3001}$$

6) (IME-96) É dado um tabuleiro quadrado 4X4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

7) (IME-96) Sejam 5 (cinco) pontos AOBO'A', nesta ordem pertencentes a uma reta genérica r tal que AO = OB = 3a; BO' = O'A = 2a, onde a é um comprimento dado. Traçam-se os círculos (O) com diâmetro AB e (O') com diâmetro BA'. Sejam C e D dois pontos quaisquer do círculo (O); as retas BC e BD cortam o círculo (O') respectivamente em C' e D'.

a) Calcule $\frac{BC'}{BC}$

b) Calcule $\frac{C'D'}{CD}$

c) Seja o ângulo CBD igual a 30°. Calcule em função de a, razão entre as áreas dos segmentos circulares S no círculo (O) limitado pela corda CD e S' no círculo (O') limitado pela corda C'D'.

8) (IME-96) Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

9) (IME-96) Sejam $w_0 = 1$, $w_1 = j$, $w_2 = j^2$ as raízes cúbicas da unidade no plano complexo (considere $w_1$ o número complexo de módulo 1 e argumento $2\pi/3$). Sabendo-se que se $c \in C$, a rotação R em torno do ponto c e amplitude igual a $\pi/3$ é dada por $R(z) = -j^2Z - jc$, $\forall c \in C - \{c\}$, pede-se:

a) determinar as relações existentes entre a, b, c, j, $j^2$, onde $a, b \in C$, de modo que o triângulo a, b, c seja equilátero.

b) determinar z para que o triângulo i, z, iz seja equilátero.

Dado: $i = \sqrt{-1}$

10) (IME-96) Dados dois trinômios do segundo grau:
$y = ax^2 + bx + c$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c'$ (II)
Considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abcissas são as raízes do trinômio (I) e A'B' os pontos cujas abcissas são as raízes do trinômio (II).
Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c' de modo que A'B' divida o segmento AB harmonicamente.

# IME 1996/1997

1) (IME-97) Resolva o sistema abaixo:
$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$

2) (IME-97) Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão: $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{65}$

3) (IME-97) Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.

4) (IME-97) Em cada uma das 6(seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados n pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.

5) (IME-97) Considere a função $y = f(x) = \text{Ln}\,(x + \sqrt{x^2+1})$ onde Ln denota o logaritmo neperiano. Responder aos itens a seguir, justificando sua resposta.
a) Se $g(x) = \text{Ln}\,(2x)$, que relação existe entre os gráficos das curvas f e g?
b) Pode-se afirmar que a função definida por $H(x) = \frac{f(x)}{2}$ é uma primitiva para a função $T(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ?

6) (IME-97) Se tg a e tg b são raízes da equação
$x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:
$y = \text{sen}^2\,(a + b) + p.\text{sen}\,(a + b).\cos\,(a + b) + q.\cos^2(a + b)$
Considere $p, q \in \Re$ com $q \neq 1$.

7) (IME-97) Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a enésima linha compreende **n** números. Encontre em função de **n**, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

8) (IME-97) Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\varphi + x \operatorname{sen}\varphi)^n$ por $(x^2 + 1)$, onde **n** é um número natural.

9) (IME-97) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja $V_1$ o volume do cone e $V_2$ o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.
**Sugestão**: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.

10) (IME-97) Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda $\overline{MM'}$ normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo MFM' = 90º, calcule os segmentos $\overline{FM}$ e $\overline{FM'}$.

## IME 1997/1998

1) (IME-98) Determine a solução da equação trigonométrica, $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 1$, $x \in R$.

2) (IME-98) Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de $\alpha$ e $\beta$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

3) (IME-98) Determine os valores de $\lambda$ que satisfaçam à inequação,

$27^{2\lambda} - \frac{4}{9}.27^{\lambda} + 27^{-1} > 0$, e represente, graficamente, a função, $y = 27^{2x} - \frac{4}{9}.27^{x} + 27^{-1}$

4) (IME-98) Determine os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma$ e $\delta$ da transformação complexa, $W = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, que leva os pontos $Z = 0; -i; -1$ para $W = i; 1; 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$.

5) (IME-98) Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse.

Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

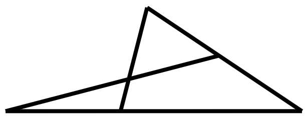
6) (IME-98) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo.
Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
Observação: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

7) (IME-98) Determine $\alpha, \beta$ e $\gamma$ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$ racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para x = 1.

8) (IME-98) Uma soma finita de números inteiros consecutivos, ímpares, positivos ou negativos, é igual a $7^3$. Determine os termos desta soma.

9) (IME-98) Considere o cubo de bases ABCD e EFGH, e arestas $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$. Sejam as arestas iguais a 3 m e os pontos M, N e P marcados de forma que:
M $\in \overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2m$,
N $\in \overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2m$, e
P $\in \overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0{,}5m$.
Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

10) (IME-98) Quatro retas se interceptam formando quatro triângulos conforme figura abaixo.
Prove que os círculos circunscritos aos quatro triângulos possuem um ponto em comum.



## IME 1998/1999

1) (IME-99) Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ e localize-as no plano complexo, sendo i = $\sqrt{-1}$

2) (IME-99) Sejam as funções g (x) e h (x) assim definidas: g(x) = 3x – 4; h (x) = f (g (x)) = $9x^2 - 6x + 1$.
Determine a função f(x) e faça seu gráfico.

3) (IME-99) Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

4) (IME-99) Determine $\theta$ sabendo-se que:

$(i) \dfrac{1-\cos^4\theta}{1-\operatorname{sen}^4\theta}\cdot\dfrac{1+\cot^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2}{3}$

$(ii)\ 0<\theta\leq 2\pi$

5) (IME-99) Determine $\alpha$ para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

6) (IME-99) Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus **n** primeiros termos pela soma dos seus **2n** primeiros termos seja independente do valor de **n**.

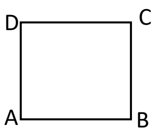
7) (IME-99) Determine uma matriz não singular **P** que satisfaça à equação matricial :

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

8) (IME-99) Seja o polinômio **P**(x) de grau (2n + 1) com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se P(x) por D(x), de grau **3**, obtém-se o resto R(x). Determine R(x), sabendo-se que as raízes de D(x) são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

9) (IME-99) Uma piscina de base retangular tem, em metros, as seguintes dimensões: base, 5 x 6 e altura, 3. Dois terços do volume da piscina são ocupados por água. Na superfície superior da água, forma-se uma pequena bolha de ar. A bolha de ar está equidistante das paredes de 5m de base. Em relação às paredes de 6m de base, sua posição é tal que a distância a uma das paredes é o dobro da distância à outra. Estabeleça um sistema de coordenadas retangulares que tenha como origem um dos cantos interiores da piscina e como um dos planos coordenados a parede de base de 6m mais próxima da bolha. Em relação a este sistema, determine as coordenadas retangulares do ponto onde se encontra a bolha de ar.

10) (IME-99) **ABCD** é um quadrado de lado $\ell$, conforme figura abaixo. Sabendo-se que **K** é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto **P** do plano definido por **ABCD** aos vértices de **ABCD**, determine:
(i) O valor mínimo de K e a posição do ponto P na qual ocorre este mínimo;
(ii) o lugar geométrico do ponto P para $K = 4\ \ell^2$.



# IME 1999/2000

1) (IME-00) Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

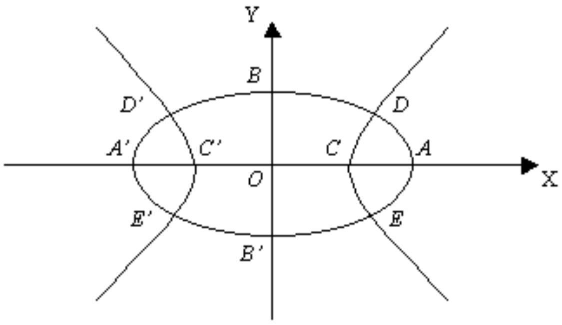
2) (IME-00) Considere *a*, *b*, e *c* números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes, $x_1$ e $x_2$, que satisfazem a condição:
$a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

3) (IME-00) Represente graficamente a função:

$$F(\theta) = \frac{1}{\text{sen}^2\,\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sec^2\theta} + \frac{1}{\text{cos sec}^2\,\theta}$$

4) (IME-00) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:
os pontos *C* e *C'* são os focos da elipse e os pontos *A* e *A'* são os focos da hipérbole;
*BB'* é o eixo conjugado da hipérbole;
*OB* = *OB'* = 3 m e *OC* = *OC'* = 4 m.




5) (IME-00) Determine o polinômio em *n*, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos *n* primeiros números naturais $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

6) (IME-00) Seja o conjunto:
$D = \{(k_1, k_2) \mid 1 \le k_1 \le 13;\ 1 \le k_2 \le 4;\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$.
Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1,x_2), (y_1,y_2), (z_1,z_2), (t_1,t_2), (r_1,r_2)\}$, $L \subset D$, existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:
a) $x_1 = y_1 = z_1$;

b) $x_1 \neq t_1$, $x_1 \neq r_1$, $t_1 \neq r_1$.

7) (IME-00) As arestas laterais de uma pirâmide regular com *n* faces têm medida $\ell$.
Determine:
a) a expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de $\ell$, de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo;
b) a expressão desse produto máximo, em função de $\ell$ e *n*.

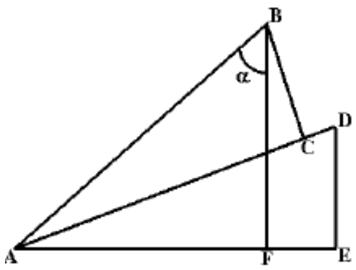
8) (IME-00) As medianas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que $tg(B\hat{G}C) = \dfrac{12.S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$, onde S é a área do triângulo ABC; AC = b; AB = c e BC = a.

9) (IME-00) Três jogadores, cada um com um dado, fizeram lançamentos simultâneos. Essa operação foi repetida cinquenta vezes. Os dados contêm três faces brancas e três faces pretas. Dessas 50 vezes:
em 28 saiu uma face preta para o jogador I;
em 25 saiu uma face branca para o jogador II;
em 27 saiu uma face branca para o jogador III;
em 8 saíram faces pretas para os jogadores I e III e branca para o jogador II;
em 7 saíram faces brancas para os jogadores II e III e preta para o jogador I;
em 4 saíram faces pretas para os três jogadores;
em 11 saíram faces pretas para os jogadores II e III.
Determine quantas vezes saiu uma face preta para pelo menos um jogador.

10) (IME-00) Considere quatro números inteiros *a, b, c* e *d*. Prove que o produto:
*(a – b) (c – a) (d – a) (d – c) (d – b) (c – b)*
é divisível por 12.

# IME 2000/2001

1) (IME-01) Considere a figura abaixo, onde AB = AD = 1, BC = x, AC = y, DE = z e AE = w. Os ângulos DEA, BCA e BFA são retos.
a) Determine o comprimento de AF e de BF em função de x, y, z e w.
b) Determine a tangente do ângulo a em função de x, y, z e w.




2) (IME-01) Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1$ (1, 4), $P_2$ (– 1, 0), $P_3$ (– 2, – 11) e $P_4$(2, 9).

(A) Determine os coeficientes do polinômio.
(B)Calcule todas as raízes do polinômio.

3) (IME-01) Determine todos os números inteiros *m* e *n* para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível
por x + a.

4) (IME-01) Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Dado o sistema abaixo

$$\begin{cases} a^x . b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} \\ 2.\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y . \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$$

determine os valores de *x* e *y*.

5) (IME-01) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos $z_1$ e $z_2$ são ortogonais se e somente se: $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$
Obs. $\bar{z}$ indica o conjugado de um número complexo z.

6) (IME-01) Considere a matriz A = ($a_{k;\,j}$), onde: $a_{k;\,j}$ = k-ésimo termo do desenvolvimento de $(1 + j.i)^{54}$, com k = 1, ..., 55; j = 1, ..., 55 e $i = \sqrt{-1}$.
a) Calcule $a_{3;\,2} + a_{54;\,1}$.
b) Determine o somatório dos elementos da coluna 55.
c) Obtenha uma fórmula geral para os elementos da
diagonal principal.

7) (IME-01) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente de duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

8) (IME-01) Calcule o valor exato de: sen[2arc cot(4/3)] + cos[2arc cossec(5/4)]

9) (IME-01) Prove que para qualquer número inteiro k, os números k e $k^5$ terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

10) (IME-01) Sejam r, s e t retas paralelas não coplanares. São marcados sobre r dois pontos A e A', sobre *s* os pontos B e B', e sobre t os pontos C e C' de modo que os segmentos AA' = a, BB' = b e CC' = c tenham o mesmo sentido.
(A) Mostre que se G e G' são os baricentros dos
triângulos ABC e A'B'C', respectivamente, então GG'
é paralelo às três retas.
(B) Determine GG' em função de a, b e c.

## IME 2001/2002

1) (IME-02) Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente múltiplos de ambos.

2) (IME-02) Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz [R], abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e $\alpha$ é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\operatorname{sen}(n\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

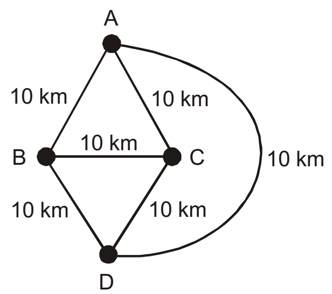
3) (IME-02) Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0,0). Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

4) (IME-02) Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

5) (IME-02) (a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio P(x) de quarto grau para que $P(x) = P(1 - x)$.
(b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

6) (IME-02) Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é 7/4.

7) (IME-02) Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo.




Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:
(a) exatamente 50 km?
(b) $n \times 10$ km?

8) (IME-02) (a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

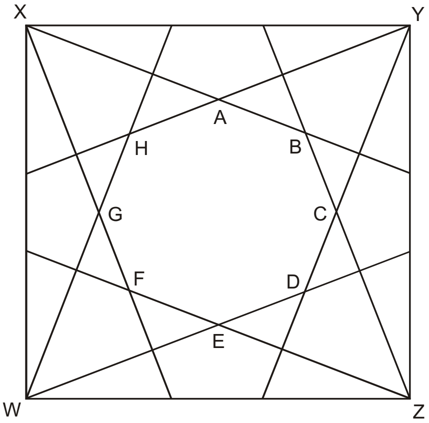
$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{x \, . \, y \, . \, z}$$

Em que condições a igualdade se verifica?

(b) Considere um paralelogramo de lados a, b, c, e área total $S_0$. Determine o volume máximo desse paralelogramo em função de $S_0$. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

9) (IME-02) Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}} = x$, sabendo-se que x > 0.

10) (IME-02) Considere um quadrado XYZW de lado a. Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em quatro partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo.



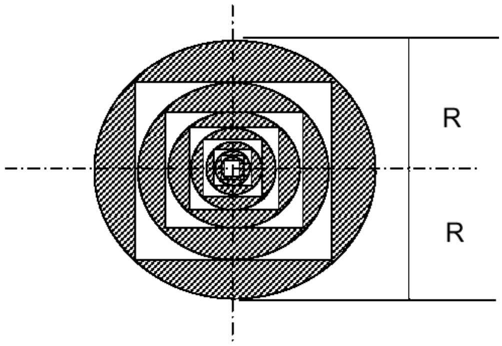

Determine o lado e a área desse octógono em função de a. As respostas finais não podem conter expressões trigonométricas.

## IME 2002/2003

1) (IME-03) Seja *z* um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde *n* é um número inteiro positivo. Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

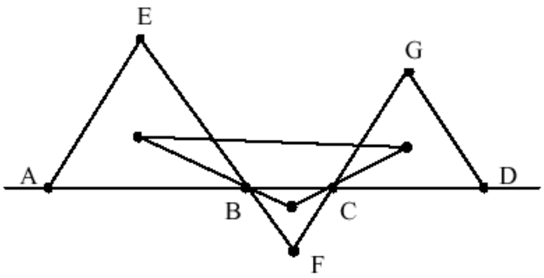
2) (IME-03) Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:
$|\log(12x^3 - 19x^2 + 8x)| = \log(12x^3 - 19x^2 + 8x)$,
onde log (*y*) e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de *y*.

3) (IME-03) Dada numa circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.




4) (IME-03) Resolva a equação tg $\alpha$ + tg $(2\alpha)$ = 2.tg $(3\alpha)$, sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

5) (IME-03) Sobre uma reta *r* são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.




6) (IME-03) Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que:
a) os pontos X, Y e Z estão situados sobre lados do hexágono;
b) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

7) (IME-03) Sejam A e B dois subconjuntos de IN. Por definição, uma função f: A $\rightarrow$ B é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer $a_1$ e $a_2 \in A$.
a) Para A = {1, 2} e B = {1, 2, 3, 4}, quantas funções de A para B são crescentes.
b) Para A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, ..., n}, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

8) (IME-03) Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular ABCD. O lado da base da pirâmide mede $\ell$ e a aresta lateral $\ell\sqrt{2}$ . Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

9) (IME-03) Demonstre que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

10) (IME-03) Considere uma matriz A, n x n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k.A$, prove que a matriz A + I é invertível, onde I é a matriz identidade n x n.

# IME 2003/2004

1) (IME-04) Calcule o número natural ***n*** que torna o determinante abaixo igual a **5**.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

2) (IME-04) Considere o polinômio **$P(x) = x^3 + ax + b$** de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

3) (IME-04) Considere uma pirâmide regular de altura ***h***, cuja base é um hexágono ***ABCDEF*** de lado ***a***. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas ***AB*** e ***BC*** divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

4) (IME-04) Calcule **sen (x + y)** em função de ***a*** e ***b***, sabendo que o produto **ab ≠ 0**, que **sen x + sen y = a** e que **cos x + cos y = b**.

5) (IME-04) Seja uma função $f: \Re - \{0\} \rightarrow \Re$, onde $\Re$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para **a** e **b** pertencentes ao domínio de $f$. Demonstre que $f$ é uma função par.

6) (IME-04) Sendo **a, b** e **c** números naturais em progressão aritmética e **z** um número complexo de módulo unitário, determine um valor para cada um dos números **a, b, c** e **z** de forma que eles satisfaçam a igualdade: $\frac{1}{z^a} + \frac{1}{z^b} + \frac{1}{z^c} = z^9$.

7) (IME-04) Considere a parábola **P** de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto **A** de coordenadas $(x_0, y_0)$ satisfazendo a $y_0 < a\,x_0^2$. Seja **S** a área do triângulo **ATT'**, onde **T** e **T'** são os pontos de contato das tangentes a **P** passando por **A**.

a) Calcule o valor da área **S** em função de **a**, $x_0$ e $y_0$.

b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto **A**, admitindo que a área **S** seja constante.

c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

8) (IME-04) Demonstre que o número $\underbrace{111...11}_{n-1}\underbrace{222...22}_{n}5$ é um quadrado perfeito.

9) (IME-04) Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de **35 pontos**. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia **3 pontos**, cada empate valia **1 ponto** e que derrotas não pontuavam.

10) (IME-04) Um quadrilátero convexo **ABCD** está inscrito em um círculo de diâmetro ***d***. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com **a, b** e **d** diferentes de zero.

a) Demonstre que **$d^2 = bd + 2a^2$**.
b) Se **a, b** e **d** são números inteiros e **a** é diferente de **b**, mostre que **d** não pode ser primo.

## IME 2004/2005

1) (IME-05) Dada a função f (x) = $\frac{\left(156^x + 156^{-x}\right)}{2}$, demonstre que:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2\,f(x)\,f(y)$$

2) (IME-05) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:
- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.
Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |
| | 0 | |

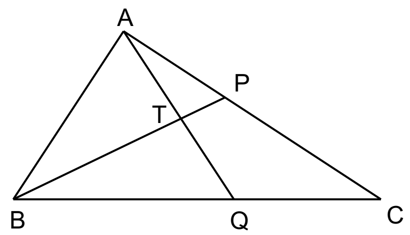
Teclado numérico

3) (IME-05) Sejam *a, b, c* e *d* números reais positivos e diferentes de 1. sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que $c^2 = (ac)^{\log_a d}$

4) (IME-05) Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$.

5) (IME-05) Resolva a equação $2\,\text{sen}\,11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,3x = 0$.

6) (IME-05) Considere um triângulo ABC de área *S*. Marca-se o ponto P sobre o lado AC taL que $\overline{PA}/\overline{PC} = q$, e o ponto Q sobre o lado BC de maneira que $\overline{QB}/\overline{QC} = r$. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine a área do triângulo ATP em função de *S*, *q* e *r*.



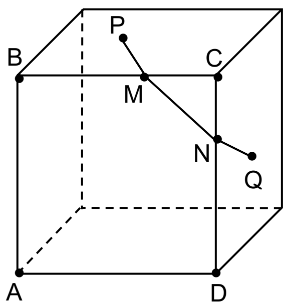
7) (IME-05) Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF'}/\overline{F'P'})$ é constante.
Sugestão: Calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF}) + (1/\overline{FP})$.

8) (IME-05) Sejam *a*, *b* e *c* as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde *r* e *t* são números reais não nulos.
a) Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de *r* e *t*.
b) Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural *k*.

9) (IME-05) Calcule o determinante da matriz *n* x *n* em função de *b*, onde *b* é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{n \text{ colunas}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \text{ linhas}$$

10) (IME-05) Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.
a) Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.
b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.




# IME 2005/2006

1) (IME-06) Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de **n**, os valores de **r** e **s** que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que **r** e **s** são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

2) (IME-06) Considere o polinômio: $p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$. Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

3) (IME-06) Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M' e N' dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM'N'N. Ao se traçar as retas AM' e BN', verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. Calcule a área do trapézio M'N'CD em função da área de ABCD.

4) (IME-06) Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Determine $D_n$ em função de **n** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

5) (IME-06) Determine os valores de **x**, **y**, **z** e **r** que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} C_{r+y}^{r} &= \log_y x \\ \log_y z &= 4 + \log_x z \\ C_{r+y}^{y} &= \log_x z + \log_z z \end{aligned}$$

onde $C_m^p$ representa a combinação de **m** elementos tomados **p** a **p** e $\log_c B$ representa o logaritmo de **B** na base **c**.

6) (IME-06) Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica
$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 1$.
Determine os valores destes ângulos (em radianos).

7) (IME-06) Considere os pontos $A(-1,0)$ e $B(2,0)$ e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta $r_1$ é tangente a C e contém o ponto A e a reta $r_2$ também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas $r_1$ e $r_2$, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de $r_1$ e $r_2$ ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

8) (IME-06) Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento **a** e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de **a**, calcule:
a) o volume total da esfera;
b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

9) (IME-06) Determine o conjunto solução $S = \{(x, y) \mid x \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ da equação $(x + y)k = xy$, sabendo que **k** é um número primo.

10) (IME-06) Sejam as somas $S_0$ e $S_1$ definidas por:

A HORA DO BIZU

$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$

$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$

Calcule os valores de $S_0$ e $S_1$ em função de **n**, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número **r**.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n$.