# PROVAS DO ITA | 1977 A 2006

## ITA 1976/1977

1) (ITA-77) Se **P (x)** é um polinômio do **5º grau** que satisfaz as condições **1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 0**, então temos:
a) P(0) = 4 c) P(0) = 9 e) n.d.a.
b) P(0) = 3 d) P(0) = 2

2) (ITA-77) Se **S** é a área total de um cilindro reto de altura **h**, e se **m** é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de **h** e dado por:
a) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+1)}}$ d) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+1)}}$
b) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+2)}}$ e) n.d.a.
c) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+2)}}$

3) (ITA-77) Seja **R** o corpo dos números reais. Em relação à equação $\mathbf{5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0}$**,** $\mathbf{x \in R}$, podemos afirma que:
a) não tem solução inteira
b) tem somente uma solução
c) tem somente duas soluções distintas
d) tem três soluções distintas
e) n.d.a.

4) (ITA-77) Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio **R** tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa vale **R/m (m ≥ 1)**. Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, é dado por:
a) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m-1}{m}\right)^2$ d) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right)$
b) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right)$ e) n.d.a.
c) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$

5) (ITA-77) Seja $\mathbf{D = \{ x \in R \,/\, x \neq \log \frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, ...\}}$. Com respeito à função $\mathbf{f: D \to IR}$, definida por $\mathbf{f(x) =} \dfrac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \dfrac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que:
a) f (x) = 2 para todo x em D

b) f (x) = 3 para todo x em D
c) f (x) = $e^3$ para todo x em D
d) f (x) não é constante em D
e) n.d.a.

6) (ITA-77) Consideremos **m** elementos distintos. Destaquemos **k** dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles **m** elementos tomados **n** a **n** (**$A_{m,n}$**) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contíguos e em qualquer ordem de colocação, **r (r < n)** dos **k** elementos destacados?
a) $(n - r - 1)\ A_{k,r}\ A_{m-k,n-r}$
b) $(n - r + 1)\ A_{k,r}\ A_{m-r,n-k}$
c) $(n - r - 1)\ A_{k,r}\ A_{m-r,n-k}$
d) $(n - r + 1)\ A_{k,r}\ A_{m-k,n-r}$
e) n.d.a.

7) (ITA-77) Seja **p** um plano. Sejam **A, B, C** e **D** pontos de **p** e **M** um ponto qualquer não pertencente a **p**. Então:
a) Se C dividir o segmento AB em partes iguais e $\overline{MA} = \overline{MB}$, então o segmento MB é perpendicular a p.
b) Se ABC for um triângulo eqüilátero e D for eqüidistantes de A, B e C, então o segmento MD é perpendicular a p.
c) Se ABC for um triângulo eqüilátero e D for eqüidistantes de A, B e C, então $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ implica em que o segmento MD é perpendicular a p.
d) Se ABC for um triângulo eqüilátero e o segmento MD for perpendicular a p então D é eqüidistante de A, B e C.

8) (ITA-77) Resolvendo a equação
**$\mathrm{tg}\left(2 \log x - \frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{tg}\left(\log x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$** temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ; $k = 0, 1, 2, \ldots$

b) $x = e^{\frac{\pi}{2} \pm k\pi}$ ; $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$ ; $k = 0, 1, 2, \ldots$

d) $x = e^{\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi}$ ; $k = 0, 1, 2, \ldots$
e) n.d.a.

9) (ITA-77) Sendo **$S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)\,x^k$**, onde **$x > 1$** e **k** é um inteiro maior que **2**, então, se **k** é um inteiro maior que **2**.

a) $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$

b) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1-x)^2} - \dfrac{(n+1)}{1-x}x^{n+1}$

c) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1-x)} - \dfrac{(n+2)}{(1-x)^2}x^{n+1}$

d) $S_n = \dfrac{1+x^{n+1}}{(1-x)^2} + \dfrac{(n+2)}{1-x}x^{n+1}$

e) n.d.a.

10) (ITA-77) Os valores reais **a** e **b**, para os quais as equações $\mathbf{x^3 + ax^2 + 18 = 0}$ e $\mathbf{x^3 + bx + 12 = 0}$ tem duas raízes comuns, são:

a) a = 1; b = 2 c) a = 5; b = 3 e) n.d.a.
b) a = -1; b = 4 d) a = - 4; b = 1

11) (ITA-77) Considere a fração $\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$ definida em R. Se **FoF** representada a função composta de **F com F**, então:

a) (FoF) (x) = x $|x^2 - 1|$, para todo x real.
b) não existe número real y, tal que (FoF) (y) = 5
c) FoF é uma função injetora
d) (FoF) (x) = 0, apenas para dois valores de x
e) n.d.a.

12) (ITA-77) Considere um triângulo ABC cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação sen $\hat{A}$ = tg $\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

a) Com os dados do problema, não podemos determinar $\hat{A}$ nem $\hat{B}$ e nem $\hat{C}$.
b) Um desses ânulos é reto.
c) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$ e $\hat{B} + \hat{C} = \dfrac{5\pi}{6}$
d) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, $\hat{B} = \dfrac{\pi}{6}$ e $\hat{C} = \dfrac{5\pi}{12}$
e) n.d.a.

13) (ITA-77) Se colocamos em ordem crescente, todos os números de **5 (cinco)** algarismos distintos, obtidos com **1, 3, 4, 6** e **7**, a posição do número 61473 será:

a) 769 b) 789 c) 809 d) 829 e) n.d.a.

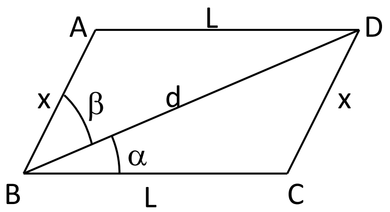
14) (ITA-77) $\dfrac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} \equiv \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$ onde **A, B** e **C** são raízes **a, b** e **c** são raízes da equação $\mathbf{x^3 - 5x^2 + 6x = 0}$, então:

a) A = - 2; B = - 1; C = 0 d) A = 5; B = 2; C = 1
b) A = 2; B = 4; C = 1 e) n.d.a.
c) A = 1; B = - 3; C = 2

15) (ITA-77) Sejam d e L respectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD abaixo. Conhecendo-se oa ângulos $\alpha$ e $\beta$ (ver figura), o comprimento do lado AB é dado por:

a) $x = \dfrac{d.\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

b) $x = \dfrac{d.\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$



c) $x = \dfrac{L.\text{sen}\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

d) $x = \dfrac{L.\cos\alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$

e) N.D.A.

16) (ITA-77) Sejam **A, B** e **C** três pontos distintos de uma reta, com **B** entre **A** e **C**. Sejam **a** e **b (a > 2b)** os comprimentos de **AB** e **DC** respectivamente. Se o segmento **AD** é perpendicular ao segmento **AC**, quanto deve medir **BD**, para que o ângulo $B\hat{D}C$ seja a metade de $B\hat{D}A$.

a) $x = \dfrac{a}{\sqrt{b(a-2b)}}$ d) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{a(a-2b)}}$

b) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{b(a-2b)}}$ e) n.d.a.

c) $x = \dfrac{b}{\sqrt{a(a-2b)}}$

17) (ITA-77) Supondo **a < b**, onde **a** e **b** são constantes reais, considere a função **g (x) = a + (b – a)x** definida no intervalo fechado **(0, 1)**. Podemos assegurar que:
a) H não é uma função injetora
b) Dado qualquer $\bar{y}$, b, sempre existe um $\bar{x}$ e, (0, 1) satisfazendo H($\bar{x}$) = $\bar{y}$
c) Para cada $\bar{y}$, com a < $\bar{y}$ < b, corresponde um único real $\bar{x}$, com 0 < $\bar{x}$ < 1, tal que H ($\bar{x}$) = $\bar{y}$.
d) Não existe uma função real **G**, definida no intervalo fechado (a, b), satisfazendo a relação G( H(x)) = x para cada x = (0, 1).
e) n.d.a.

18) (ITA-77) No conjunto dos números reais, a desigualdade $\log_{\frac{1}{3}}\left|\log_4\left(x^2-5\right)\right| > 0$ é verdadeira para:

a) $\sqrt{5} < |x| < 3$ c) $\sqrt{6} < |x| < 3$ d) n.d.a.

b) $\sqrt{5} < |x| < \sqrt{6}$ d) $|x| > 3$

19) (ITA-77) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, uma das retas tangentes à circunferência da equação $\mathbf{x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0}$, passando pelo ponto **P(– 2, 5)**, tem por equação:
a) 3x – y + 1 = 0 d) 4x – 3y + 23 = 0
b) x + y – 3 = 0 e) n.d.a.
c) x + 3y – 13 = 0

20) (ITA-77) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da circunferência eu passa pelos pontos $\mathbf{P_1(0, -3)}$ e $\mathbf{P_2(4, 0)}$, o cujo entro está sobre reta **x + 2y = 0**:
a) $5(x^2 + y^2) + 2z + 3y = 0$
b) $5(x^2 + y^2) + 14z + 7y - 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + y + 5 = 0$
e) n.d.a.

21) (ITA-77) Seja **x** = $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada **2 x 2** onde **m** é um número inteiro qualquer. Se **P – ($a_{ij}$)** é uma mátria definida por **P = $X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + ... + x$**, onde **n** é um número inteiro positivo **(n ≥ 1)**, então podemos afirmar que:
a) um elemento $a_{ij}$ de matriz P é igual a n = $\frac{n(n+1)}{2}$
b) um elemento $a_{ij}$ de matriz P é igual a m = $\frac{n(n-1)}{2}$
c) um elemento $a_{ij}$ de matriz P é igual a m = $\frac{m(n-1)}{2}$
d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, n é uma matriz.
e) n.d.a.

22) (ITA-77) Qual o valor de **B (b > 0)** na expressão **bπ + a**, sabendo-se que ao elevarmos este binômio a uma determinada potência inteira e positiva, uma das parcelas do desenvolvimento é **$6840\, a^{10}\, x^2$**?
a) um número par maior que 8
b) um número ímpar maior que 8
c) um número par menor que 8
d) um número ímpar menor que 8
e) n.d.a.

23) (ITA-77) O número das diagonais de um polígono regular de **2n** lados, que não passa pelo centro da circunferência a este polígono é dado por:
a) 2n (n – 2)
b) 2n (n –1)
c) 2n (n –3)
d) $\frac{n(n-5)}{2}$
e) n.d.a.

24) (ITA-77) O ângulo da geratriz com o eixo de um cone de revolução mede **30°**. Se **S** é a área de sua secção reta a uma distância **h** do vértice, qual a relação entre **S** e **h**?
a) $S = \frac{\pi h^2}{2}$
b) $S = \frac{3\pi}{2}h^2$
c) $S = \frac{\pi h^2}{3}$
d) $S = \frac{2\pi}{3}h^2$
e) n.d.a.

25) (ITA-77) Seja $(k_1 + k_2)\, x + (k_2 - k_3)\, y + (k_1 - k_3)\, x = 0$
$(k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_3)\, y + (k_3 - k_1)\, x = 0$
$(k_1 - k_2)\, x + (k_3 - k_2)\, y + (k_3 + k_1)\, x = 0$
um sistema homogêneo de equação lineares reais em **x, y** e **x**. Com respeito ao sistema acima podemos afirmar:
a) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$ então o sistema só admite solução trivial.

b) Se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

c) O sistema admita solução não trivial, se e somente se, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.

d) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

e) n.d.a.

# ITA 1977/1978

1) (ITA-78) Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I – Se dois planos são secantes, todas as retas se um deles sempre interceptam o outro plano.

II – Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos.

III – Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

IV – Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta.

V – Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III c) I; III; V e) n.d.a.

b) I; II; V d) II; III; IV

2) (ITA-78) Examinando o sistema abaixo

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$ podemos concluir que:

a) o sistema é determinado

b) o sistema é indeterminado com 2 incógnitas arbitrárias

c) o sistema é indeterminado com 1 (uma) incógnita arbitrária

d) o sistema é impossível

e) n.d.a.

3) (ITA-78) O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + k = 0$, onde **k** é um número real positivo e $|z_0^2| > k$, é:

a) uma hipérbole com centro $z_0$.

b) uma elipse com um dos focos em $z_0$.

c) uma circunferência com centro em $z_0$.

d) uma parábola com vértice em $z_0$.

e) n.d.a.

4) (ITA-78) Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}$ e o conjunto $\mathbf{f^{-1}(B) = \{x \in R;\ f(x) \in B\}}$, então:

a) $f\,(f^{-1}(B)) \subset B$

b) $f\,(f^{-1}(B)) = B$ se f é injetora

c) $f\,(f^{-1}(B)) = B$

d) $f^{-1}\,(f\,(B)) = B$ se f é sobrejetora

e) n.d.a.

5) (ITA-78) Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, respectivamente, as características das matrizes incompletas e completas, do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + kz = 3 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y + kz = 0 \end{cases};\ \text{e}\ \mathbf{M = (k + r_1 + r_2)^2}.$$

Quais as condições sobre **M** e **k**, de modo que o sistema acima admita solução única?

a) $M = 25$ e $k = -1$ d) $M = 25$ e $k \neq -1$

b) $M \neq 25$ e $k = -1$ e) n.d.a.

c) $M \neq 25$ e $k \neq -1$

06) (ITA-78) Seja **f (x)** uma função real de variável real. Se para todo **x** no domínio de **f** temos **f(x) = f(– x)**, dizemos que a função é par; se, no entanto, temos **f(x) = – f(– x)**, dizemos que a função é impar. Com respeito à função $\mathbf{g(x) = \log_e [\ sen\ x + \sqrt{1 + sen^2 x}\ ]}$, podemos afirmar que:

a) está definida apenas para $x \geq 0$;

b) é uma função que não é par nem impar.

c) é uma função par.

d) é uma função impar.

e) n.d.a.

7) (ITA-78) Sejam a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, **k** é real, e $\mathbf{k} \neq \frac{1}{2}$, e a progressão geométrica $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ...,}$ **na** de razão $\mathbf{q > 0,\ a_i = q^{i-1}\ det\ A,\ i = 1, 2, 3, ..., n}$. Se $\mathbf{a_3 = det\ B}$, com $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{k}{3} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a soma dos **16 (dezesseis)** primeiros termos dessa progressão geométrica é igual a $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, podemos dizer que **k** é:

a) $k = 1 - 3^{-8}$

b) k é um número negativo

c) $k = 1 + 3^{-8}$

d) $k \geq 0$

e) n.d.a.

8) (ITA-78) Seja **a** uma constante real. Eliminando **0** das equações abaixo:

$$\begin{cases} x \cdot sen\,\theta + y \cdot cos\,\theta = 2a \cdot sen\,2\theta \\ x \cdot cos\,\theta - y \cdot sen\,\theta = a \cdot cos\,2\theta \end{cases}$$ obtemos:

a) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

b) $(x - y)^{\frac{2}{3}} - (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

c) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

d) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$

e) n.d.a.

9) (ITA-78) Sejam **P** um ponto interior de um triângulo eqüilátero **MNQ** de lado **2λ**, $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = y$, $\overline{PC} = z$ as respectivas distâncias do ponto **P** aos lados $\overline{MN}$, $\overline{MQ}$ e $\overline{NQ}$ e xy + xz + yz = $\frac{\lambda^2}{9}$. Então, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

a) $3\frac{\lambda^2}{2}$ b) $5\frac{\lambda^2}{4}$ c) $7\frac{\lambda^2}{3}$

d) impossível de ser obtido, pois a posição do ponto **P** não está determinada no triângulo.

e) n.d.a.

10) (ITA-78) Seja **z** um número complexo. Se **z +** $\frac{1}{z}$ é um número real então podemos afirmar:

a) $z \neq 0$ e $Re z \geq 0$

b) Im z = 0 ou |z| = 1

c) é necessariamente um número real.

d) $z^2 = -1$

e) n.d.a.

11) (ITA-78) Seja $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ são reais e $a_m \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Se **f (1)** é solução real da equação $2^{x-3} - 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} = 14$ e $f(-1) = 2f(1)$ e $a_0 = 2f(-1)$, então podemos afirmar:

a) f (x) tem somente raízes reais positivas.

b) f (x) tem somente raízes negativas.

c) f (x) tem somente raízes reais inteiras.

d) f (x) não tem raízes reais inteiras.

12) (ITA-78) Se numa esfera de raio **R**, circunscrevemos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera, é dado por:

a) $3\pi R^3$ c) $3\sqrt{3}\,\pi R^3$ e) n.d.a.

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi R^3$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

13) (ITA-78) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6$ raízes do polinômio $P(x) = 6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6$, então:

a) P (x) admite mais de duas raízes negativas.

b) $\sum_{j=1}^{6} x_j \rangle \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{x_j}$

c) P (x) admite duas raízes irracionais.

d) $\sum_{j=1}^{6} x_j = 0$ pois P (x) = 0 é uma equação recíproca.

e) n.d.a.

14) (ITA-78) Se **a > 1**, o valor real de **m** para o qual a equação $x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$ tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:

a) $m = \log_e a - 8$ ou $m = -9a$

b) $m = \log_e a - 9$

c) $m = \dfrac{15}{\log_e a}$

d) $m = -\dfrac{9}{8}\log_e a$

e) n.d.a.

15) (ITA-78) Os catetos **b** e **c** de um triângulo retângulo de altura **h (relativa à hipotenusa)**, são dados pelas seguintes expressões: **b =** $\sqrt{k+\dfrac{1}{k}}$ e **c =** $\sqrt{k-\dfrac{1}{k}}$ onde **k** é um número real maior que **1**. Então o valor de **h** em função de **k** é:

a) $\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{2k}$ c) $\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{-1-k^2}$ e) n.d.a.

b) $\dfrac{k^2-1}{k^2-2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2(k^2-1)}}{2k}$

16) (ITA-78) Sejam **y = F (x) =** $a^x$ **(a > 0, a ≠ 1)** uma função real de variável real e, **x =** $x_n$ **(n = 1, 2, 3, 4, ....)** uma progressão aritmética de razão **r > 0**. Nestas condições, uma das alternativas abaixo é correta:
a) $y_n = F(x_n)$, (n = 1, 2, 3, ...) constitui uma progressão aritmética de razão, $a^r$.
b) $y_n = F(x_n)$, (n = 1, 2, 3, ...) é uma progressão aritmética de razão, $-a^r$.
c) $y_n = F(x_n)$, (n = 1, 2, 3, ...) não é progressão aritmética e nem progressão geométrica.
d) $y_n = F(x_n)$, (n = 1, 2, 3, ...) é uma progressão geométrica de razão, q > 1, se admitirmos que a < 1.
e) n.d.a.

17) (ITA-78) Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}2x^3+1, & \text{se} \quad x\le 2\\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{se} \quad 2<x\le 3\\ 2x-5, & \text{se} \quad x>3\end{cases}$$

Se **a = log₂1024** e $x_0$ **= a – 6**, então o valor da função **f (x)** no ponto $x_0$**, f(x)**, é dado por:
a) $f(x_0) = 1$ c) $f(x_0) = 3$ d) n.d.a.
b) $f(x_0) = 2$ d) $f(x_0) = \dfrac{1}{8}$

18) (ITA-78) Qual das funções definidas abaixo é bijetora?
Obs.: $\mathbf{R^+ \{x \in R;\ x \ge 0\}}$ e **[a, b]** é o intervalo fechado.
a) $f : R \to R^+$ tal que $f(x) = x^2$
b) $f : R^+ \to R^+$ tal que $f(x) = x + 1$
c) $f : [1, 3] \to [2, 4]$ tal que $f(x) = x + 1$
d) $f : [0,2] \to R$ tal que $f(x) = \text{sen}\, x$
e) n.d.a.

19) (ITA-78) A soma de todos os valores de **x** que satisfazem à identidade abaixo: $9^{x-\frac{1}{2}} - \dfrac{4}{3^{1-x}} = -1$, é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) n.d.a.

20) (ITA-78) Seja o triângulo de vértices **A: (1,2); B: (2, 4)** e **C: (4, 1)**, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. A distância do ponto de encontro das alturas desse triângulo ao lado **AC**, é:

a) $\frac{9\sqrt{10}}{70}$ c) $8\sqrt{10}$ e) n.d.a.

b) $\frac{9}{70}$ d) $3\sqrt{3}$

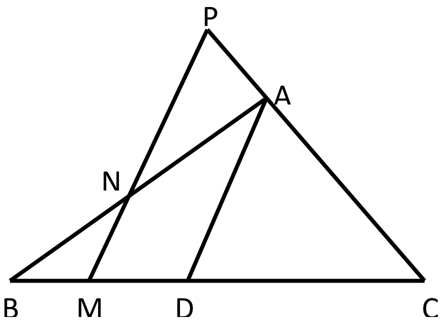
## ITA 1978/1979

1) (ITA-79) sejam A, B, C matrizes reais 3x3, satisfazendo as seguintes relações: $AB = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de A?
a) 1/16 b) 1/8 c) 1/4 d) 8 e) 4

2) (ITA-79) Se a, b, c são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde r é um número real, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:
a) –60 b) 62 + r c) $62 + r^2$
d) $62 + r^3$ e) 62 – r

3) (ITA-79) Seja f uma função real definida para todo x real tal que:
f é ímpar;
f (x – y) = f(x) + f(y);
f (x) $\geq$ 0, se x $\geq$ 0.
Definindo $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x}$, se x $\neq$ 0, sendo n um número natural, podemos afirmar que:
a) f é não decrescente e g é uma função ímpar.
b) f é não decrescente e g é uma função par.
c) g é uma função par e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.
d) g é uma função ímpar e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.
e) f é não decrescente e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

4) (ITA-79) Considere o triângulo ABC, onde AD é a mediana relativa ao lado BC. Por um ponto arbitrário M do segmento BD, tracemos o segmento MP paralelo a AD, onde P é o ponto de interseção desta paralela com o prolongamento do lado AC. Se N é o ponto de interseção de AB com MP, podemos afirmar que:




a) MN + MP = 2 BM
b) MN + MP = 2 CM
c) MN + MP = 2 AB
d) MN + MP = 2 AD
e) MN + MP = 2 AC

5) (ITA-79) Se *a* e *b* são ângulos complementares, $0 < a < \pi/2$, $0 < x < \pi/2$ e $\frac{\text{sen}a + \text{sen}b}{\text{sen}a - \text{sen}b} = \sqrt{3}$, então $\text{sen}\left(\frac{3a}{5}\right) + \cos(3b)$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$  b) $\sqrt{3}/3$  c) $\sqrt{2}$  d) $\sqrt{2}/2$  e) 1

6) (ITA-79) Considere uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é *a*, *a* > 1, a razão é *q*, *q* > 1, e o produto dos seus termos é *c*. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, quantos termos tem esta progressão geométrica?

a) 12  b) 14  c) 16  d) 18  e) 20

7) (ITA-79) Estudando a equação $32z^5 = (z + 1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:

a) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
b) A equação possui 4 raízes imaginárias situadas uma em cada quadrante.
c) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma do 1º quadrante e outra no 4º quadrante.
d) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 2º quadrante e outras duas no 3º quadrante.
e) A equação tem 4 raízes imaginárias, duas do 1º quadrante e outras duas no 4º quadrante.

8) (ITA-79) Considere o sistema $\begin{cases} (x-y)^2 + x(1+2y) \le \frac{7}{8} \\ x - y + a = 0 \end{cases}$

Se $a = a_0$ é o número real positivo para o qual a solução do sistema, $x = x_0$, $y = y_0$, é única, podemos afirmar que:

a) $\frac{x_0}{y_0} = \frac{7}{3}$  c) $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{6}{5}$  e) $x_0 y_0 = -\frac{15}{8}$

b) $\frac{x_0}{y_0} = \frac{6}{5}$  d) $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{5}$

9) (ITA-79) Considere o tetraedro regular (4 faces iguais) inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é dada por:

a) $16\sqrt{3}$ cm b) $12\sqrt{6}$ cm e) $6\sqrt{3}$ cm
b) $13\sqrt{6}$ cm d) $8\sqrt{3}$ cm

10) (ITA79) Considere o problema anterior, isto é, o tetraedro regular inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm, sendo HD sua altura. A diferença entre o volume do tetraedro e o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo DHM em torno de HD é dada por:

a) $(8\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi)$ cm$^3$ d) $(3\sqrt{3}-\frac{3}{5}\sqrt{3}\pi)$ cm$^3$
b) $(5\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\pi)$ cm$^3$ e) $(7\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\pi)$ cm$^3$
c) $(4\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{3}\pi)$ cm$^3$

# ITA 1979/1980

1) (ITA-80) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real desta equação podemos afirmar que:
a) a solução pertence ao intervalo fechado [1, 2].
b) a solução pertence ao intervalo fechado [–2, –1].
c) a solução pertence ao intervalo aberto (–1, 1).
c) a solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.
e) a equação não tem solução.

2) (ITA-80) Seja z um número complexo de módulo 1 e de argumento $\theta$. Se n é um número inteiro positivo, $z^n + \frac{1}{z^n}$ é igual a:

a) $\cos(n\theta)$ b) $2\cos(n\theta)$ c) $\text{sen}(n\theta)$
d) $e\ \text{sen}(n\theta)$ e) $\text{sen}(n\theta) + \cos(n\theta)$

3) (ITA-80) Sobre a função $f(x) = \text{sen}^2 x$, podemos afirmar que:
a) é uma função periódica de período $4\pi$.
b) é uma função periódica de período $2\pi$.
c) é uma função periódica de período $\pi$.
d) é uma função periódica onde o período pertence ao intervalo $(\pi, 2\pi)$.
e) não é uma função periódica.

4) (ITA-80) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e $O_n$ a matriz nula, também de ordem n. Considere as seguintes afirmações:
1. $AB = BA$ 4. $(AB)C = A(BC)$
2. Se $AB = AC$, então $B = C$ 5. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3. Se $A^2 = O_n$, então $A = O_n$
A respeito destas afirmações, qual das alternativas a seguir é verdadeira?
a) Apenas a afirmação 1 é falsa.
b) Apenas a afirmação 4 é verdadeira.
c) A afirmação 5 é verdadeira.
d) A afirmações 2 e 3 são verdadeiras.

e) As afirmações 3 e 4 são verdadeiras.

5) (ITA-80) Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto regular são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da diagonal é igual a:

a) $\frac{7}{12}$ cm  b) $\frac{9}{24}$ cm  c) $\frac{\sqrt{24}}{12}$ cm

d) $\frac{\sqrt{61}}{12}$ cm  e) $\frac{\sqrt{73}}{12}$ cm

6) (ITA-80) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos, representa a seguinte curva:

a) Circunferência de raio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

b) Circunferência de raio $\sqrt{a^2+b^2}$

c) Circunferência de raio $\frac{a+b}{2}$

d) Parábola de vértice no ponto (a, b)

e) Elipse com semieixos de comprimento a/2, b/2

7) (ITA-80) Sejam A e B subconjuntos não-vazios de $\Re$ e f: A→B, g: B→A duas funções tais que $f o g = I_B$, onde $I_B$ é a função identidade em B. Então podemos afirmar que:

a) f é sobrejetora  d) g é injetora e par

b) f é injetora  e) g é bijetora e ímpar

c) f é bijetora

8) (ITA-80) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a curva $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (1, 1), (2, m) e (m, 2), onde m é um número real diferente de 2. Sobre esta curva podemos afirmar que:

a) Ela admite um mínimo para todo m tal que 1/2 < m < 3/2

b) Ela admite um mínimo para todo m tal que 0 < m < 1

c) Ela admite um máximo para todo m tal que – 1/2 < m < 1/2

d) Ela admite um máximo para todo m tal que 1/2 < m < 3/2

e) Ela admite um máximo para todo m tal que 0 < m < 1

9) (ITA-80) No intervalo $\pi < x < 2\pi$, quais são os valores de k que satisfazem a inequação $(\log_e k)^{\text{sen } x} > 1$?

a) Para todo k > e  d) Para todo 1 < k < e

b) Para todo k > 2  e) Para todo 0 < k < e

c) Para todo k > 1

10) (ITA-80) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:

a) 36  b) 48  c) 52  d) 54  e) 56

11) (ITA-80) Considere a progressão aritmética ($x_1$, $x_2$, …, $x_n$) de n termos, $n \geq 2$, cuja soma de seus termos é K. A soma da sequência dos n valores $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ definidos por $y_i = ax_i + b$, i = 1, 2, …, n, onde a e b são números reais com $a \neq 0$, é dada por:
a) K
b) aK + b
c) aK + nb
d) $a^nK + nb$
e) $a^nK$

12) (ITA-80) Sejam A = ($a_{ij}$) uma matriz real quadrada de ordem 2 e $I_2$ a matriz identidade também de ordem 2. Se $r_1$ e $r_2$ são as raízes da equação $\det(A - rI_2) = nr$, onde n é um número inteiro positivo, podemos afirmar que:
a) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$
b) $r_1 + r_2 = -(a_{11} + a_{22})$
c) $r_1 + r_2 = n.(a_{11} + a_{22})$
d) $r_1.r_2 = \det A$
e) $r_1.r_2 = -n.\det A$

13) (ITA-80) Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência $C_1$ e inscrito à circunferência $C_2$. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é K cm, qual será a soma dos comprimentos destas duas circunferências?
a) $(2\pi k)/3$ cm
b) $(4\pi k)/3$ cm
c) $4\pi k$ cm
d) $2\pi k$ cm
e) $\pi k$ cm

14) (ITA-80) Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é n vezes a área da superfície da esfera, n > 1. So volume da esfera é *r* cm$^3$ e se a área da base do cone é *s* cm$^2$, o comprimento em centímetros da altura do cone é dada por:
a) $r/s$
b) $(nr)/s$
c) $(2nr)/s$
d) $(3nr)/s$
e) $(4nr)/s$

15) (ITA-80) Seja $f(t) = 4 + 3\cos(\pi t) + 4\,\text{sen}(\pi t)$ a função definida em R. Sobre esta função qual das alternativas abaixo é correta?
a) f(t) é função par
b) f(t) é função ímpar
c) o maior valor que f(t) assume é 9
d) o menor valor que f(t) assume é -3
e) o menor valor que f(t) assume é -1/2

# ITA 1980/1981

1) (ITA-81) Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular, se det A = 0, ou seja, se o determinante de A é nulo, e não-singular se $\det A \neq 0$. Mediante esta definição, qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) A soma de duas matrizes A e B é uma matriz singular, se det A = – det B.
b) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se, e somente se, ambas forem singulares.
c) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se pelo menos uma delas for singular.

d) Uma matriz singular possui inversa.
e) A transposta de uma matriz singular é não-singular.

2) (ITA-81) Se os três lados de um triângulo estão em progressão geométrica, então a razão desta progressão está compreendida necessariamente entre os valores:
a) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
b) $\frac{1}{2}(\sqrt{4}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{4}+1)$
c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$
d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$
e) 0 e 1

3) (ITA-81) Os lados de um triângulo medem a, b e c centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede a centímetros, se forem satisfeitas as relações 3a = 7c e 3b = 8c.
a) 30º b) 60º c) 45º d) 120º e) 135º

4) (ITA-81) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de $24\pi$ cm$^2$ e o raio de sua base mede 4 cm?
a) $16\sqrt{20}\,\pi/3$ cm$^3$ b) $\sqrt{24}\,\pi/4$ cm$^3$ c) $\sqrt{24}\,\pi/3$ cm$^3$
d) $8\sqrt{24}\,\pi/3$ cm$^3$ e) $\sqrt{20}\,\pi/3$ cm$^3$

5) (ITA-81) Denotemos por $\Re$ o conjunto dos números reais. Seja g: $\Re \to \Re$ uma função não-nula que satisfaz, para todo x e y reais, a relação g(x + y) = g(x) + g(y). Se f: $\Re \to \Re$ for definida por:

$$f(x) = \text{sen}\left[\frac{2g(x)}{a}\right],\ a \neq 0,$$

então podemos garantir que:
a) f é periódica com período $\pi a$.
b) Para $a$ = n (n natural), temos f(n) = 2 sen [g(1)].
c) Se g(1) $\neq$ 0, então g(1) = f(0).
d) Se g(T) = $\pi a$, então T é período de f.
e) Se g(T) = $2\pi$, então T é período de f.

6) (ITA-81) Denotemos por log $x$ e $\log_a x$ os logaritmos de $x$ nas bases 10 e $a$, respectivamente. As raízes reais da equação: $2\left[1+\log_{x^2}(10)\right] = \left[\frac{1}{\log(x^{-1})}\right]^2$ são:
a) 10 e $\sqrt{10}$ b) 10 e $1/\sqrt{10}$ c) 1/10 e $\sqrt{10}$
d) 1/10 e $1/\sqrt{10}$ e) Nenhuma das anteriores.

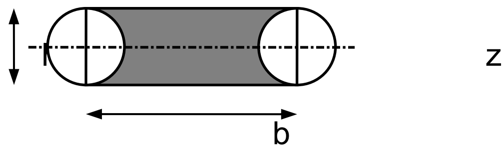
7) (ITA-81) Se R denota o conjunto dos números reais e (a, b) o intervalo aberto {x $\in$ R; a < x < b}, seja f: (0, $\pi/2$) $\to$ R definida por f(x) = $\sqrt{\sec^2 x + \text{cossec}^2 x}$ . Se $\alpha \in$ (0, $\pi/2$) é tal que tg $\alpha$ = a/b, então f($\alpha$) é igual a:

a) $\dfrac{a+b}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

d) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ e) Nenhuma das anteriores

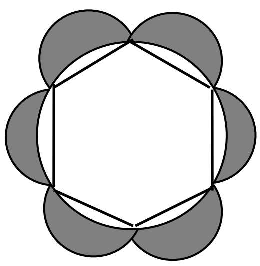
8) (ITA-81) Considere um retângulo de altura h e base b e duas circunferências com diâmetro h e centros nos lados do retângulo, conforme a figura abaixo. Seja z um eixo que passa pelo centro destas circunferências. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação da área hachurada da figura em torno do eixo z.

a) $\pi h(b - h)$
b) $\pi h(b + h)$
c) $\pi b(b - h)$
d) $\pi b(b + h)$
e) nenhuma das anteriores




9) (ITA-81) Na figura abaixo, temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r e 6 outras semicircunferências com centros nos pontos médios dos lados do hexágono e cujos diâmetros são iguais aos lados do hexágono. calcule a área da superfície hachurada.

a) $(\sqrt{3} - \pi/6).r^2$
b) $(\sqrt{2} - \pi/4).r^2$
c) $(3\sqrt{3}/2 - \pi/4).r^2$
d) $(\sqrt{3}/2 - \pi/6).r^2$
e) $(\sqrt{2}/2 - \pi/4).r^2$



10) (ITA-81) Sejam a e k constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o menor argumento?

a) $z = ak\sqrt{1-k^2} + ia(i - k^2)$.
b) $z = k\sqrt{1-k^2} - ia(i - k^2)$.
c) $z = k\sqrt{1-k^2} - i\sqrt{1-k^2}$.
d) $z = -k\sqrt{1-k^2} - ia(i - k^2)$.
e) $z = a + ik$

11) (ITA-81) O conjunto A definido por $A = \{z \in C;\ (z-i)\overline{(z-i)} = 4\}$ representa no plano complexo:

a) uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e $-i$.
b) uma circunferência de centro no ponto (0, 1) e raio 2.
c) uma circunferência de centro no ponto (0, 0) e raio 4.
d) um par de retas que se cortam no ponto (1, 1).
e) nenhuma das anteriores.

12) (ITA-81) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?
a) $p^2 = rq$ b) $2p + r = q$ c) $3p^2 = r^2q$
d) $p^3 = rq^3$ e) $q^3 = rp^3$

13) (ITA-81) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais verificou-se que os pontos A = (a, 1, a); B = (2a, 1, a) e C = (b, a, a) são colineares. Além disso, o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + y + z = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y e z é indeterminado. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, qual é a alternativa correta?
a) a e b são números pares
c) a não é divisor de b
b) a e b são números inteiros consecutivos
d) $0 < a < 1/2$ e $0 < b < 1$
e) nenhuma das anteriores

14) (ITA-81) Sela xOy um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Com referência a este sistema, consideremos um ponto P = (2, 0) e uma reta r cuja equação é $x - 1 = 0$. Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias ao ponto P e à reta r são iguais?
a) Duas semirretas, cujas equações são: $x - y - 1,5 = 0$ e $x + y - 1,5 = 0$, com $x \geq 1,5$.
b) uma circunferência, com centro no ponto (3, 0) e raio 1,5.
c) Uma parábola, cuja equação é $y = 2x^2 - 3$.
d) Uma parábola, cuja equação é $y^2 = 2x - 3$.
e) Nenhuma das anteriores.

15) (ITA-81) Se $p_1, p_2, ..., p_n$ forem fatores primos de um número inteiro positivo $p$ e se $p = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_n^{s_n}$, então o número de divisores de $p$ será:
a) $s_1 + s_2 + ... + s_n$
b) $s_1 s_2 ... s_n$
c) $s_1 s_2 ... s_n - 1$
d) $(s_1 + 1)(s_2 + 1) ... (s_n + 1) - 1$
e) $(s_1 + 1)(s_2 + 1) ... (s_n + 1)$

# ITA 1981/1982

1) (ITA-82) Seja f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x+b} & \text{se} \quad x \neq -b \\ -1 & \text{se} \quad x = -b \end{cases}$

Se $f(f(x)) = x$ para todo $x$ real, então
a) $ab = -2$ c) $ab = 0$ e) $ab = 2$
b) $ab = -1$ d) $ab = 1$

2) (ITA-82) Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 2)$, podemos afirmar que
a) *a* e *b* tem sinais opostos e são inteiros
b) *a* e *b* tem o mesmo sinal e são inteiros

c) *a* e *b* tem sinais opostos e são racionais não inteiros
d) *a* e *b* tem o mesmo sinal e são racionais não inteiros
e) somente *a* é inteiro

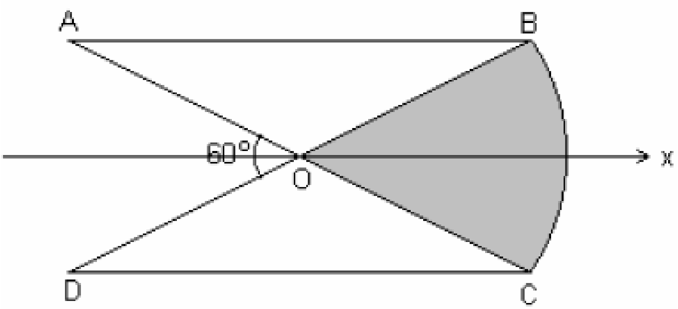
3) (ITA-82) Os valores de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ satisfazem as desigualdades
a) $\alpha > \beta > \gamma$
b) $\alpha > \gamma > \beta$
c) $\beta > \alpha > \gamma$
d) $\beta > \gamma > \alpha$
e) $\gamma > \alpha > \beta$

4) (ITA-82) Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2\,AA^t) = 4x$ ?
a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

5) (ITA-82) Sejam A, B e P matrizes reais quadradas de ordem n, tais que $B = P^tAP$. Sendo P inversível, dentre as afirmações abaixo, qual é a falsa?
a) Se B é simétrica, então A é simétrica.
b) Se A é simétrica, então B é simétrica.
c) Se A é inversível, então B é inversível.
d) Se B é inversível, então A é inversível.
e) det A = det B.

6) (ITA-82) Considere as famílias de curvas do plano complexo, definida por $\mathrm{Re}(1/z) = C$, onde z é um complexo não-nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma
a) circunferência com centro no eixo real e raio igual a C.
b) circunferência com centro no eixo real e raio igual a 1/C.
c) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a 1/(2C).
d) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a 1/(2C).
e) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a 1/C.

7) (ITA-82) A figura hacurada abaixo é a seção transversal de um sólido de revolução em torno do eixo x. A parte tracejada é formada por um setor circular de raio igual a 1 e ângulo igual a 60º. O segmento de reta AB é paralelo ao eixo x. A área da superfície total do sólido mede




a) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\pi$ b) $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\pi$ c) $\left(\sqrt{3} + \frac{5}{2}\right)\pi$
d) $\left(\sqrt{3} + \frac{5}{2}\right)\pi$ e) $\frac{5\pi}{2}$

8) (ITA-82) A função f:[0, $\pi$/4] $\rightarrow$ [0,1] definida por f(x) = $\left(1+\text{tgx}.\text{tg}\frac{x}{2}\right)\cos x$ é uma função:

a) constante
b) sobrejetora e ímpar
c) injetora e ímpar
d) injetora e par
e) sobrejetora e par

9) (ITA-82) Considere o sistema $\begin{cases} 2x-1=3.\text{sen}\theta \\ x-2=\cos\theta \end{cases}$

para x e $\theta$ reais. Se restringirmos $\theta$ ao intervalo 0, $\pi$/2, então:
a) o sistema não possuirá solução.
b) o sistema possuirá apenas uma solução ($x_1$, $\theta_1$).
c) o sistema possuirá duas soluções ($x_1$, $\theta_1$) e ($x_2$, $\theta_2$), de modo que $x_1 + x_2$ = 40/13.
d) o sistema possuirá duas soluções ($x_1$, $\theta_1$) e ($x_2$, $\theta_2$), de modo que sen $\theta_1$ + sen $\theta_2$ = 17/12.
e) o sistema possuirá duas soluções ($x_1$, $\theta_1$) e ($x_2$, $\theta_2$), de modo que cos $\theta_1$.cos $\theta_2$ = 1/2.

10) (ITA-82) Num triângulo de lados a = 3 m e b = 4 m, diminuindo-se de 60° o ângulo que esses lados formam, obtém-se uma diminuição de 3 $m^2$ em sua área. Portanto a área do triângulo inicial é de:
a) 4 $m^2$ b) 5 $m^2$ c) 6 $m^2$ d) 9 $m^2$ e) 12 $m^2$

11) (ITA-82) Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64 m e os ângulos adjacentes são iguais ao arc cos 7/25. Então a área do triângulo é de:
a) 168 $m^2$ b) 192 $m^2$ c) 84 $m^2$ d) 96 $m^2$ e) 157 $m^2$

12) (ITA-82) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja “E” uma elipse de equação $5x^2 + y^2 = 5$. Considerando r e s duas retas distinats, tangentes a “E” a com coeficiente angular comum igual a 2, podemos afirmar que:
a) As equações dessas retas são y = 2x + p e y = 2x – p, onde p é um número irracional.
b) Os pontos de contato dessas retas com a elipse “E” são pontos do 1º e 3º quadrantes.
c) A equação de uma reta das retas é y = 2x – 3 e a outra tangencia “E” num ponto cujas coordenadas são números racionais.
d) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos de contato de r e s com a elipse “E” é 2/5.
e) A reta y = x corta uma das retas, r ou s, num ponto M = (a, a), onde a é real e |a| > 7.

13) (ITA-82) Considere o triângulo ABC do plano cartesiano, onde A = (p, q), B = (2p, 3q) e C = (3p, 2q), sendo p e q reais. Se M é o ponto de interseção de suas medianas, então a reta que passa por M e é paralela á reta BC intercepta os eixos coordenados nos pontos:
a) (0, p) e (4p, 0)
b) (0, 4q) e (4p, 0)
c) (0, 4p) e (4q, 0)
d) (0, q) e (p, 0)
e) (0, 3q) e (3p, 0)

14) (ITA-82) Seja $a_1, a_2, ..., a_n$, ($a_1$ > 0, i = 1, 2, ..., n) uma progressão geométrica de razão r e f: $R^+ \rightarrow R$ uma função definida por f(x) = log ( $qx^p$ ) onde p e q são números reais positivos. Nestas condições, $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$ é

a) uma progressão geométrica de razão log ($q\ r^p$)
b) uma progressão geométrica de razão p log r
c) uma progressão aritmética de razão log q + p log $a_1$
d) uma progressão aritmética de razão log q + p log r
e) uma progressão aritmética de razão p log r

15) (ITA-82) O conjunto verdade da desigualdade $\log_2(\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1)) < 0$ é:

a) (0, 1/2) ∪ (3/2, 2)
b) (– 2, 0) ∪ (3/2, 2)
e) (1/2, 3/2)
d) (– ∞, 1/2) ∪ (3/2, ∞)
e) o conjunto vazio

## ITA 1982/1983

1) (ITA-83) Ao girarmos o gráfico da função
$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in [0,1] \\ \sqrt{2x - x^2}; & x \in (1,2] \end{cases}$$
em torno do eixo das abscissas (eixo dos x), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:
a) π/3 b) π/2 c) π d) 2π e) 3π

2) (ITA-83) Um general possui *n* soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com *r* soldados e outro da retarguarda com *s* soldados (*r* + *s* = *n*), ele poderá dispor seus homens de:
a) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.
b) $\frac{n!}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.
c) $\frac{n!}{(rs)!}$ maneiras distintas neste ataque.
d) $\frac{2(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.
e) $\frac{2(n!)}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.

3) (ITA-83) Dadas as funções $f(x^2) = \log_{2x} x$ e $g(x) = 2\text{sen}^2 x – 3\text{sen}\ x + 1$ definidas para x > 0 e x ≠ 1/2, o conjunto A = {x ∈ (0, 2π): (gof)(x) = 0} é dado por:
a) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

b) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 2^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

c) $A = \left\{4^{2-\pi}, 4^{6-\pi}, 4^{6-5\pi}\right\}$

d) A = $\left\{4^{\frac{2\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{2\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

e) A = $\left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

4) (ITA-83) Considere os números reais não nulos a, b, c e d em progressão geométrica tais que a, b e c são raízes da equação (em x) $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$, onde $B$ e $D$ são números reais e B > 0. Se cd – ac = –2B, então:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{16B^2}{B^2+4B}$

b) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{16B}{B^2+4}$

c) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{16B}{B+4}$

d) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{16B}{B+4}$

e) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{B+4}{16B}$

5) (ITA-83) Dado o polinômio P definido por $P(x) = \text{sen}\,\theta - (\text{tg}\,\theta)x + (\sec^2\theta)x^2$, os valores de $\theta$ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que P admita somente raízes reais são:

a) $0 \le \theta \le \pi/2$

b) $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$

c) $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ ou $3\pi/2 < x \le 2\pi$

d) $0 \le x \le 3\pi/2$

e) $\pi/2 \le x < 3\pi/2$

6) (ITA-83) Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $a = 2^{(1+\log_2 5)}$; $b = 2^{\log_2 8}$;

$c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$.

Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

a) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

7) (ITA-83) Sejam três funções f, u, v: R $\rightarrow$ R tais que: $f(x+\frac{1}{x})=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ para todo x não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo x real. Sabendo-se que $x_0$ é um número real tal que $u(x_0).v(x_0) \neq 0$ e $f\left|\frac{1}{u(x_0)}.\frac{1}{v(x_0)}\right|=2$, o valor de $f\left|\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right|$ é:

a) – 1 b) 1 c) 2 d) 1/2 e) – 2

8) (ITA-83) A solução da equação *arc tg x* + *arc tg* $\frac{x}{x+1}=\frac{\pi}{4}$ definida no conjunto dos reais diferentes de -1 é:

a) 1 b) 1/2 c) 1/2 e 1 d) 2 e) 2 e 1

9) (ITA-83) Dados A, B e C, ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in (4\pi/3, 5\pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$, o sistema:

$$\begin{cases} \text{sen}A + \text{sen}B = \text{sen}\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$$ admite como solução:

a) $A = \pi - \alpha/2$, $B = \alpha/2 - 2\pi/3$ e $C = 2\pi/3$
b) $A = \pi - \alpha/2$, $B = \alpha/2$ e $C = 0$
c) $A = 2\pi/3$, $B = \alpha/2$ e $C = \pi/3 - \alpha/2$
d) $A = \pi - \alpha/2$, $B = 2\pi/3$ e $C = \alpha/2 - 2\pi/3$
e) $A = \pi$, $B = \alpha/2$ e $C = -\alpha/2$

10) (ITA-83) Determine o polinômio P de 3º grau que representa uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ para todo x real. Com o auxílio deste, podemos calcular a soma $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$, onde n é um número natural, que é igual a:

a) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{2}{3}n$ d) $4n^3 + 2n^2 + n$

b) $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$ e) $n^3 + n^2 + 2n$

c) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3}n$

11) (ITA-83) Seja *a* um número real tal que $a \neq \pi/2 + k\pi$, onde $k \in Z$. Se $(x_0, y_0)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} (2\sec a)x + (3\tan a)y = 2\cos a \\ (2\tan a)x + (3\sec a)y = 0 \end{cases}$$ então podemos afirmar que:

a) $x_0 + y_0 = 3 - 2\text{sen}\, a$

b) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a + 2$

c) $x_0 - y_0 = 0$

d) $x_0 + y_0 = 0$

e) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$

12) (ITA-83) Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede 64 cm$^2$. Numa seção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede $4\pi$ cm$^2$, então a altura desta pirâmide mede:
a) 1 cm b) 2 cm c) 4 cm d) 6 cm e) 60 cm

13) (ITA-83) Sejam *m* e *n* constantes reais estritamente positivas. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, consideramos C a circunferência de centro $P\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ e de raio $R = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$ e r a reta de equação $mx+ny+\left(\sqrt{m^2-n^2}-2\right)=0$. Netas condições, se s é a reta que passa por P e é perpendicular à reta r, então os pontos de interseção de s com C são:

a) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}-1,\frac{1}{n}-\frac{n}{m}\right)$

b) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$

c) $\left(\frac{1}{m},\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m},-\frac{m}{n}\right)$

d) $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}+1\right)$ e $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}+\frac{n}{m}\right)$

e) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{n}+\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}-1,\frac{1}{n}-\frac{n}{m}\right)$

14) (ITA-83) As equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + nbx + 12 = 0$, onde *a* e *b* são constantes reais e *n* um inteiro, têm duas raízes comuns. Das afirmativas abaixo, qual é a verdadeira?
a) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.
b) As raízes não comuns às equações são negativas quando *a* é negativo.
c) A soma das raízes não comuns às equações é 5.
d) *b* e *n* possuem o mesmo sinal.
e) As raízes comuns às equações dependem de *n*.

15) (ITA-83) Consideremos um número complexo z tal que $\frac{z^2}{\bar{z}.i}$ tem argumento igual a $\pi/4$ e $\log_2(z+\bar{z}+2)=3$. Nestas condições, podemos afirmar que:

a) Não existe $\ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)$.

b) $z^4+\ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)=-324$.

c) $z+2\bar{z}$ é um número real.

d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=\frac{1}{10^3}(1+i)$.

e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3=-\frac{1}{108}(1+i)$.

# ITA 1983/1984

1) (ITA-84) Sejam as afirmações:
I. Por um ponto passa uma única reta.
II. Um ponto e uma reta determinam um plano.
III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.
IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.
Podemos garantir que:
a) apenas III é verdadeira.
b) I e II são falsas.
c) apenas I é falsa.
d) apenas II e III são verdadeiras.
e) apenas II e IV são verdadeiras.

2) (ITA-84) Os coeficientes do trinômio $x^2 + bx + c$ constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão não nula $r = \frac{q}{2}$, onde q é a razão da progressão aritmética $b^2 - 1$, $c^2 - b^2$. Nestas condições podemos afirmar que o trinômio apresenta:
a) uma raiz nula  b) duas raízes reais distintas
c) duas raízes iguais  d) duas raízes complexas
e) nenhuma raiz

3) (ITA-84) Sejam P, Q, R matrizes reais quadradas arbitrárias de ordem n. Considere as seguintes afirmações:
I - se PQ = PR, então Q = R
II - se $P^3$ é a matriz nula, então o determinante de P é zero
III - PQ = QP
Podemos afirmar que:
a) I é a única afirmação verdadeira
b) II e III são afirmações verdadeiras
b) I e II são afirmações verdadeiras
a) III é a única afirmação falsa
b) I e III são afirmações falsas

4) (ITA-84) Seja $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$, onde $x \in \Re$ e $\Re$ é o conjunto dos números reais. Um subconjunto de $\Re$ tal que $f: D \to \Re$ é uma função injetora é:
a) $D = \{x \in \Re: x \geq 2 \text{ e } x \leq -2\}$
b) $D = \{x \in \Re: x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2\}$
c) $D = \Re$
d) $D = \{x \in \Re: -2 < x < 2\}$
e) $D = \{x \in \Re: x \geq 2\}$

5) (ITA-84) A equação da circunferência tangente ao eixo das abscissas na origem e que passa pelo ponto (a,b) onde $a^2 + b^2 = 2b$ e $b \neq 0$, é:
a) $(x - b)^2 + y^2 = b^2$  d) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e) $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$
c) $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$

6) (ITA-84) Sendo $z = \cos [\text{arc tg } (a^2 + b^2) + \text{arc cotg } (a^2 + b^2)]$, podemos afirmar que:
a) $z = 0$
b) $z = 1$
c) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $z = \cos (a^2 + b^2)$, se $a^2 + b^2 \leq 1$
e) é impossível determinar o valor de z.

7) (ITA-84) Sabendo-se que $n$ é um número natural tal que $\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{3i}$ é um número real, podemos afirmar que:
a) $n = 6k$, k = 1, 2, 3, …
b) $n = 3(2k + 1)$, k = 0, 1, 2, 3, …
c) $n = 3k$, k = 0, 1, 2, 3, …
d) $n = k$, k = 1, 2, 3, …
e) não existe valor de n natural tal que o número dado seja real.

8) (ITA-84) O lugar geométrico da intersecção de duas retas, uma passando pelo ponto (0, –1) com coeficiente angular $a_1$, a outra passando pelo ponto (0,1) com coeficiente angular $a_2$ tal que $a_1^2 + a_2^2 = 2$, é:
a) $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = 1$ d) $y = a_1x^2$
b) $x^2 - y^2 = 1$ e) $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$
c) $x^2 + y^2 = 1$

9) (ITA-84) Num triângulo isósceles, a razão entre a altura referente à base e esta é $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo $\alpha$ oposto à base, podemos afirmar que:
a) $\alpha = \pi/4$ d) $\alpha = \pi/6$
b) $\alpha = \pi/2$ e) não temos dados suficientes para determiná-lo.
c) $\alpha = \pi/3$

10) (ITA-84) Sabendo-se que $z_1$, = i, $z_2$ e $z_3$ são as raízes da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, onde $a$, $b$, $c$ são reais não-nulos, podemos afirmar que:
a) $z_1$, $z_2$ e $z_3$ são imaginários puros
b) $z_2$ e $z_3$ são reais
c) $z_1z_2z_3 = c$
d) $z_1 + z_2 + z_3 = a$
e) pelo menos uma das raízes é real.

11) (ITA-84) Os valores de $a$ e $k$ reais que tornam verdadeira a expressão
$\log_a 2a + \frac{\log_{2a} k}{\log_{6a} k} \log_a 2a = (\log_a 2a)(\log_a 3)$ são:

a) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$

b) $a = 2$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$, $k \neq 1$

c) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$, $k \neq 1$

d) quaisquer valores de $a$ e $k$ com $k \neq 6a$

e) qualquer valor de $a$ positivo com $a \neq 1$ e $a \neq 1/6$, e qualquer valor positivo de $k$

12) (ITA-84) Os valores reais de $a$, que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3^{2a+1}.x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ (3^a.10 - 3)x + y = 1 \end{cases}$$ possível e determinado, são:

a) qualquer valor de $a$.

b) apenas $a = 0$ e $a = 3$.

c) apenas $a = 2$.

d) apenas $a = 1$ e $a = -1$.

e) não existe valor de $a$ nestas condições.

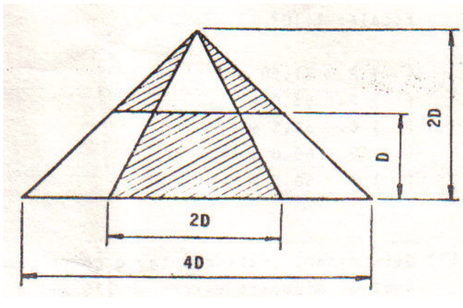
13) (ITA-84) O valor de $m$, tal que $\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 2^p = 729$, é:

a) 14 b) 9 c) 6 d) 7 e) 8

14) Possuo um "laser" de alta potência como ferramenta de corte e uma peça plana de forma parabólica que desejo cortar. Suponha que a peça definida por $x^2 - y - 1 \leq 0$ e $y \leq 1$ esteja no plano xOy e que o "laser", colocado no plano xOz, tem a janela de saída da luz fixa no ponto (0, 0, 1) podendo o seu tubo girar no plano xOz. A partir do início do corte, na borda da peça, de quantos graus devo girar o "laser" para terminar o serviço?

a) $\pi$ b) $\pi/2$ c) $\pi/4$ d) $3\pi/2$ e) $\pi/3$

15) A figura abaixo é a secção de dois cones retos cortados por um plano paralelo às bases. O volume da região hachurada é:




a) $\frac{5}{6}\pi D^3$. b) $\frac{7}{12}\pi D^3$. c) $\frac{1}{3}\pi D^3$. d) $\pi D^3$. e) $2\pi D^3$.

# ITA 1984/1985

1) (ITA-85) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere a família de circunferências que passam pelo ponto (2, –1/2) e que são tangenciadas pela reta y = –3/2. Então a equação do lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dada por:

a) $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$
b) $y^2 - 2y - 5x - 2 = 0$
c) $x^2 + 2x - 7y + 3 = 0$
d) $y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$

2) (ITA-85) Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura deste triângulo medem 8 cm, então o raio desta circunferência mede:

a) 3 cm  b) 4 cm  c) 5 cm  d) 6 cm  e) $3\sqrt{2}$ cm

3) (ITA-85) Um tronco de cone reto com bases paralelas está inscrito em uma esfera cujo raio mede 2 m. Se os raios das bases do tronco do cone medirem, respectivamente, r m e 2 m. Então o seu volume medirá:

a) $\frac{2}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{1-r^2})$

b) $\frac{3}{2}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + \sqrt{1-r^2})$

c) $\frac{7}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} - 2\sqrt{1-r^2})$

d) $\frac{7}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2})$

e) $\frac{3}{2}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2})$

4) (ITA-85) Num triângulo *ABC* considere conhecidos os ângulos *BAC* e *CDA* e a medida *d* do lado *A*. Nestas condições, a área S deste triângulo é dada pela relação:

a) $S = \dfrac{d^2}{2\text{sen}(BAC + CDA)}$

b) $S = \dfrac{d^2\text{sen}(CDA)\text{sen}(BAC)}{2\text{sen}(BAC + CDA)}$

c) $S = \dfrac{d^2\text{sen}(CDA)}{2\text{sen}(BAC + CDA)}$

d) $S = \dfrac{d^2\text{sen}(BAC)}{2\cos(BAC + CDA)}$

e) $\dfrac{d^2\text{sen}(CDA)\text{sen}(BAC)}{2\cos(BAC + CDA)}$

5) Sejam X um conjunto não vazio; A e B dois subconjuntos de X. Definimos $A^C = \{x \in X$ tal que $x \notin A\}$ e $A - B = \{x \in A$ tal que $x \notin B\}$.
Dadas as sentenças:
1. $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$, onde "$\Leftrightarrow$" significa "equivalente" e $\phi$ o conjunto vazio;
2. Se X – IR; $A = \{x \in IR$ tal que $x^3 - 1 = 0\}$; $B = \{x \in IR$ tal que $x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in IR$ tal que $x - 1 = 0\}$, então A = C = B;
3. $A - \phi = A$ e $A = B = A - (A \cap B)$;
4. $A - B \neq A \cap B^C$;
Podemos afirmar que está (estão) correta(s):
a) As sentenças 1 e 3.
b) As sentenças 1, 2 e 4.
c) As sentenças 3 e 4.
d) As sentenças 2, 3 e 4.
e) Apenas a sentença 2.

6) (ITA-85) Uma esfera de raio $r = \sqrt{3}$ cm está inscrita num prisma hexagonal regular que, por sua vez, está incrito numa esfera de raio R. Pode-se afirmar que a medida do raio R vale:

a) $\sqrt{7}$ cm  b) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm  c) $2\sqrt{3}$ cm

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm  e) $4\sqrt{3}$ cm

7) (ITA-85) Dada a equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$, podemos afirmar que:
a) Não existe x real que a satisfaça.
b) $x = \log_3 5$ é uma solução desta equação.
c) $x = \log_5 3$ é uma solução desta equação.
d) $x = \log_3 15$ é uma solução desta equação.
e) $x = 3.\log_5 15$ é uma solução desta equação.

8) (ITA-85) Como $ax^4 + bx^3 + 5x + 3 = 0$ é recíproca e tem o 1 como raiz, o produto das raízes reais desta equação é:
a) 2  b) –1  c) 1  d) 3  e) 4

9) (ITA-85) Dadas as sentenças:
1- Sejam f: $X \to Y$ e g: $Y \to X$ duas funções satisfazendo $(gof)(x) = x$, para todo $x \in X$. Então f é injetiva, mas g não é necessariamente sobrejetiva.
2- Seja f: $X \to Y$ uma função injetiva. Então, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, onde A e B são dois subconjuntos de X.
3- Seja f: $X \to Y$ uma função injetiva. Então, para cada subconjunto A de X, $f(Ac) \subset (f(A))c$ onde $Ac = \{x \in X / x \notin A\}$ e $(f(A))c = \{x \in Y / x \notin f(A)\}$.
Podemos afirmar que está (estão) correta(s):
a) as sentenças nº 1 e nº 2.
b) as sentenças nº 2 e nº 3.
c) Apenas a sentença nº 1.
d) as sentenças nº 1 e nº 2.
e) Todas as sentenças.

10) (ITA-85) Considere as seguintes funções: $f(x) = x - 7/2$ e $g(x) = x^2 - 1/4$ definidas para todo x real. Então, a respeito da solução da inequação $|(gof)(x)| > (gof)(x)$, podemos afirmar que:
a) Nenhum valor de x real é solução.
b) Se $x < 3$ então x é solução.
c) Se $x > 7/2$ então x é solução.
d) Se $x > 4$ então x é solução.
e) Se $3 < x < 4$ então x é solução.

11) (ITA-85) Seja f: $\Re \to \Re$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todo $\alpha$, x, y $\in \Re$. Se $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma progressão aritmética de razão d, então podemos dizer que $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_4))$
a) É uma progressão aritmética de razão d.
b) é uma progressão aritmética de razão f(d) cujo termo primeiro é $a_1$.

c) é uma progressão geométrica de razão f(d).
d) É uma progressão aritmética de razão f(d).
e) Nada se pode afirmar.

12) (ITA-85) Dizemos que um número real $\lambda$ é autovalor de uma matriz real $I_{nxn}$ quando existir uma matriz coluna $X_{nx1}$ não-nula, tal que $TX = \lambda X$. Considere uma matriz real $P_{nxm}$ satisfazendo PP = P. Denote que $\lambda_1$ um autovalor de P e por $\lambda_2$ um autovalor de PP. Podemos afirmar que, necessariamente:
a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
b) $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$
c) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao conjunto {0, 1}
d) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao conjunto $\{t \in R$ tal que $t < 0$ ou $t > 1\}$
e) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao intervalo aberto (0, 1)

13) (ITA-85) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 0 & x_1 & 1 \\ x_3 & -x_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_3 \end{pmatrix}$$

onde $x_1$, $x_2$ e $x_3$ são raízes da seguinte equação em x: $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$. Se det A = $4x_1$ e det (A – B) = 8, então podemos afirmar que:
a) det (A – B) = 5 e a = 2 b) det A = b e a = 2
c) det B = 2 e b = 5 d) det (A – B) = a e = det A
e) det A = a/2 e b = a/2

14) (ITA-85) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos e $p_n = a_1 . a_2 ... a_n$. Se a > 0 é uma constante real tal que $P_n = \frac{p^{n^2+n}}{2^n}$, então podemos afirmar que os números $a_1, a_2, ..., a_n$, nesta ordem:
a) Formam uma progressão geométrica de razão q = p e $a_n = (p^{2n})/2$
b) Formam uma progressão geométrica de razão q = p e $a_n = (p^n)/2$
c) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = (p^n)/2$
d) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = (p^{2n})/2$
e) Não formam uma progressão geométrica.

15) (ITA-85) Seja a um número real. Os valores de $z \in C$ que satisfazem $\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\left(\frac{a+(\bar{z})^{10}}{1-i}\right) \in \Re$ são
a) $z = -a + i\sqrt[10]{|a|}$
b) Não é possível determiná-los
c) $z = -i\sqrt[10]{|a|}$
d) Não existe $z \in C$ tal que isto aconteça
e) todo $z \in R$

# ITA 1985/1986

1) (ITA-86) Consideremos as seguintes afirmações sobre uma função f: $\Re \to \Re$.

1. Se existe $x \in \Re$ tal que $f(x) \neq f(-x)$ então f não é par.
2. Se existe $x \in \Re$ tal que $f(-x) = -f(x)$ então f é impar.
3. Se f é par e ímpar então existe $x \in \Re$ tal que $f(x) = 1$.
4. Se f é ímpar então fof (f composta com f) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números.

a) 1 e 4  b) 1, 2 e 4  c) 1 e 3  d) 3 e 4  e) 1, 2 e 3

2) (ITA-86) Seja $a \in \Re$, $0 < a < 1$ e $f$ uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{(a^{x^2} - a^2)^{1/2}}{\cos(2\pi.x) + 4.\cos(\pi.x) + 3}$$

Sobre o domínio A desta função podemos afirmar que:

a) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cap Z \subset A$  d) $\{x \in \Re: x \notin Z \text{ e } x \geq \sqrt{2}\} \subset A$

b) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap Z$  e) $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

c) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset A$

3) (ITA-86) Seja f: $\Re \to \Re$ uma função que satisfaz à seguinte propriedade: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \Re$.

Se $g(x) = f(log_{10}(x^2 + 1)^2)$ então podemos afirmar que

a) O domínio de g é $\Re$ e $g(0) = f(1)$
b) g não está definida para os reais negativos e $g(x) = 2f(log_{10}(x^2 + 1))$, para $x \geq 0$
c) $g(0) = 0$ e $g(x) = 2f(log_{10}(x^2 + 1))$, $\forall x \in \Re$
d) $g(0) = f(0)$ e g é injetora
e) $g(0) = -1$ e $g(x) = [f(log_{10}(x^2 + 1)^{-1}]^2$, $\forall x \in \Re$

4) (ITA-86) Sejam os números reais $x > 0$, $a > b > 1$. Os três números reais

$$x, \quad \sqrt{x \log_a b}, \quad \log_a (bx)$$

são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica infinita. A soma S desta progressão vale:

a) $S = 2x/(1 - \log_a b)$
b) $S = (x + 1)/(1 - 1/2\log_a b)$
c) $S = 1/(1 - \sqrt{\log_a b})$
d) $S = 1/(1 - \sqrt{\log_a b})$
e) impossível determinar S pois é finito.

5) (ITA-86) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais sejam A(0, a), B(a/2, 0), C(0, 2a) pontos dados onde a é um número real, $a < 0$.

Sejam as retas: (r) passando por A e B e
(s) passando por C e paralela a (r).

A área do trapézio (T) delimitado pelos eixos cartesianos e pelas retas (r) e (s) vale

a) $3a^2$  b) $3a^2/4$  c) $3a^2/2$  d) $\sqrt{3}a^2$  e) $3a^2/4 + a^4$

6) (ITA-86) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais considere o triângulo ABC, sobre o qual sabemos que:

a. o lado AC está sobre a reta y = x.
b. o vértice A tem coordenadas (1, 1) e o ângulo A mede 60º.

c. o vértice B está no eixo das ordenadas.
d. o lado BC é paralelo ao eixo das abscissas.
A área deste triângulo vale:
a) 9 b) $9/2 + 3\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}/2$
d) $9/2 + 5\sqrt{3}/2$ e) $1/2 + 5\sqrt{3}$

7) (ITA-86) Sejam *a*, *b* e *c* números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ por $x - 2$ e $x + 2$ são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:
a) 1 b) 28/5 c) 37/5 d) 44/15 e) – 3

8) (ITA-86) Os valores de $x \in \Re$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ e de $n \in N$ para os quais a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (\sec x - \tan x)^{n-i} \frac{1}{(\sec x + \tan x)^i} = \frac{255}{(\sec x + \tan x)^n}$$

se verifica são:
a) $\forall\ x \in \Re$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $n = 5$.
b) $\forall\ x \in \Re$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z\ \forall\ n \in N$.
c) $\forall\ x \in \Re$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $x \neq \pi/4 + k\pi$, $k \in Z$ e $n = 6$.
d) $\forall\ x \in \Re$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ e $n = 8$.
e) Não existe $n \in N$ tal que a igualdade seja verdadeira.

9) (ITA-86) Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\sqrt{3}/3$. Sabendo-se que se a aresta da base for aumentada de 2 cm, o volume V do prisma ficará aumentado de 108 $cm^3$ considerando que aresta lateral permanece a mesma, podemos afirmar que o volume do prisma é:
a) 10 $cm^3$
b) 12 $cm^3$
c) 3/2 $cm^3$
d) 36 $cm^3$
e) 27/2 $cm^3$

10) (ITA-86) Um cilindro equilátero de raio 3 cm está inscrito num prisma triangular reto, cujas arestas da base estão em progressão aritmética de razão s, s > 0. Sabendo-se que a razão entre o volume do cilindro e do prisma é $\pi/4$ podemos afirmar que área lateral do prisma vale
a) 144 $cm^2$
b) $12\pi$ $cm^2$
c) 24 $cm^2$
d) $\pi/5$ da área lateral do cilindro
e) 5/3 da área lateral do cilindro

11) (ITA-86) Seja *k* uma constante real e considere a equação em *x*

$$\text{arcsen}\frac{1+x^2}{2x} = k \text{, sendo } x \neq 0$$

Então podemos afirmar que:
a) Para cada $k \in \Re$, a equação admite uma única solução.
b) Para cada $k \in \Re$, a equação admite duas soluções.
c) Existe $k \in \Re$ tal que a equação admite uma infinidade de solução.
d) Não existe $k \in \Re$ tal que a equação admita solução.

e) Existe k $\in \Re$ tal que a equação admite uma única solução.

12) (ITA-86) Sejam $a$, $b$ e $c$ números reais dados com $a < 0$. Suponha que $x_1$ e $x_2$ sejam as raízes reais da função $y = ax^2 + bx + c$ e $x_1 < x_2$. Sejam $x_3 = -b/2a$ e $x_4 = -(2b + \sqrt{b^2 - 4ac})/4a$. Sobre o sinal de y podemos afirmar que:

a) $y < 0, \forall x \in \Re, x_1 < x < x_3$
b) $y < 0, \forall x \in \Re, x_4 < x < x_2$
c) $y > 0, \forall x \in \Re, x_1 < x < x_4$
d) $y > 0, \forall x \in \Re, x > x_4$
e) $y < 0, \forall x \in \Re, x < x_3$

13) (ITA-86) No conjunto C dos números complexos seja a tal que |a| < 1. O lugar geométrico dos pontos z $\in$ C que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$ é:

a) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.
b) Uma hipérbole.
c) Uma elipse de semi-eixo maior igual a 1.
d) Uma parábola.
e) Formado por duas retas concorrentes.

14) (ITA-86) Seja $x \in \Re$ e $A$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se S é o conjunto dos x tais que $A$ é uma matriz inversível, então podemos afirmar que:

a) S é vazio
d) $S = \{k\pi, k \in Z\}$
b) $S = \{k\pi/2, k \in Z\}$
e) $S = [-\pi/2, \pi/2]$
c) $S = [0, 2\pi]$

15) (ITA-86) Dizemos que duas matrizes reais, 2x1, A e B quaisquer são linearmente dependentes se e somente se existem dois números reais x e y não ambos nulos tais que xA + yB = 0, onde 0 é a matriz nula 2x1.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ k^n - 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} k^{-n} + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

onde k $\in$ R* e n $\in$ N = (1, 2, 3, ...}

a) A e B são linearmente dependentes, $\forall$ k $\in$ R*.
b) existe um único k $\in$ R* tal que A e B não são linearmente dependentes.
c) existe um único k $\in$ R* tal que A e B são linearmente dependentes.
d) existe apenas dois valores de k $\in$ R* tais que A e B são linearmente dependentes.
e) não existe valor de k $\in$ R* tal que A e B sejam linearmente dependentes.

## ITA 1986/1987

1) (ITA-87) Considere a função y = f(x) definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada x real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) y = f(x) é uma função par
b) y = f(x) é uma função ímpar
c) $f(x) \geq 0$ para todo real x
d) $f(x) \leq 0$ para todo real x
e) f(x) tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$

2) (ITA-87) Considere x = g(y) a função inversa da seguinte função: $y = f(x) = x^2 - x + 1$, para número real $x \geq 1/2$. Nestas condições, a função g é assim definida:
a) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq 3/4$
b) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq 1/4$
c) $g(y) = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq 3/4$
d) $g(y) = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq 1/4$
e) $g(y) = \frac{3}{4} + \sqrt{y - \frac{1}{2}}$, para cada $y \geq 1/2$

3) (ITA-87) Seja f: $\Re \to \Re$ uma função real tal que: $f(x) \neq 0$, para cada x em $\Re$ e f(x + y) = f(x).f(y), para todos x e y em $\Re$. Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ uma PA de razão r, tal que $a_1$ = 0. Então $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4))$
a) É uma PA de razão igual a f(r) e 1° termo $f(a_1) = f(0)$
b) É uma PA de razão igual a r
c) É uma PG de razão igual a f(r) e 1° termo $f(a_1) = 1$
d) É uma PG de razão igual a r e 1° termo $f(a_1) = f(0)$
e) Não é necessariamente uma PA ou PG.

4) (ITA-87) Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de IR. Assinale a alternativa correta.
a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
b) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente $F \cup G$ = IR.
c) Se $F \subset G$ e $G \subset F$ então $F \cap G = F \cap G$.
d) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
e) Se $F \subset G$ e $G \neq$ IR, então $(F \cap G) \cup G$ = IR.

5) (ITA-87) Multiplicando-se por 2 as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ vamos obter raízes da seguinte equação:
a) $2y^3 - 6y^2 + 6y - 4 = 0$ b) $y^3 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$ c) $8y^3 - 8y^2 + 4y - 1 = 0$
d) $y^3 - 8y^2 + 8y + 8 = 0$ e) $4y^3 - 4y^2 - 4y - 8 = 0$

7) (ITA-87) Seja S a coleção de todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, onde i é a unidade imaginária. Então podemos garantir que:
a) S = {3/2 – 2i} b) S = {1/2 + 2i, -1/2 – 2i} c) S = {1/2 + 4k$\pi$; k = 1, 2, 3}
d) S = {1/4 + 3i} e) S = {1 + 2ki; k = 1, 2, 3}

8) (ITA-87) A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é:
a) 1 b) 2 c) zero d) $-2\sqrt{2}i$ e) $2+\sqrt{3}i$

9) (ITA-87) Seja N o número de soluções reais da equação sen x = $|2 + 3i|$ então, temos:
a) N > 50 b) N = zero c) N = 2 d) N = 1 e) N > 2 e N < 10

10) (ITA-87) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z.w + \bar{z}.\bar{w}$, então o conjugado de u será necessariamente:
a) igual a |z| |w|
b) um número imaginário puro
c) igual ao dobro da parte real de z + w
d) igual ao dobro da parte real do número z.w
e) diferente de u

11) (ITA-87) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar, empregando caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?
a) 60 b) 120 c) 240 d) 40 e) 80

12) (ITA-87) O número de arranjos de n + 2 objetos tomados cinco a cinco vale 180n. Nestas condições, concluímos que:
a) n é um número par
b) n é um número primo
c) n está compreendido entre 100 e 200
d) n é um número par
e) n é divisível por 5

13) (ITA-87) No desenvolvimento de $(x^2 + 3x)^{12}$, o coeficiente de $x^{20}$ é:
a) $3^4 \times 55$ b) $3^5 \times 110$ c) $3^6 \times 55$ d) $3 \times 110$ e) 55

14) (ITA-87) Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Esse número é:
a) 5 b) 8 c) 2 d) 4 e) 3

15) (ITA-87) Considere u = x.*ln*(3), v = x.*ln*(2) e $e^u.e^v = 36$. Nestas condições, temos:
a) x = – 4 b) x = 12 c) x = – 3 d) x = 9 e) x = 2

16) (ITA-87) Se x e y são números reais e $ln[(y^2 + 1).e^x] - ln(y^2 + 1)^4 = x - 3$ então:
a) $y = 1 + \sqrt{e-1}$ b) $y = 10 - \sqrt{e-1}$ c) $y = \pm\sqrt{e-1}$ d) $y = \pm\sqrt{e-1}$ e) $y = \sqrt{e-1}$
/2

17) (ITA-87) Suponha que x e y são números reais, satisfazendo simultaneamente às equações 2x + 3y = 21 e 7x – 4x = 1. Nestas condições, se S = x + y, então:
a) S = 10 b) S = 8 c) S = 5 d) S = -8 e) S = 15

18) (ITA-87) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde M = $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da diagonal principal da matriz P é:

a) 9/4 b) 4/9 c) 4 d) 5/9 e) –1/9

19) (ITA-87) Seja $\lambda$ um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos $a_{ij}$ são definidos por: $a_{ij} = i + j$. Sobre a equação em $\lambda$ definida por $\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda$, qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) Apresenta apenas raízes negativas.
b) Apresenta apenas raízes inteiras.
c) Uma raiz é nula e a outra negativa.
d) As raízes são 0 e 5/2.
e) Todo $\lambda$ real satisfaz esta equação.

20) (ITA-87) Quaisquer que sejam os números reais a, b e c, o determinante da matriz
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$ é dada por:

a) ab + ac + bc b) abc c) zero
d) abc + 1 e) 1

21) (ITA-87) Seja P o determinante da seguinte matriz real: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & x \\ 2 & 3 & 4 & x^2 \\ 4 & 9 & 8 & x^3 \end{bmatrix}$. Para se obter P < 0 é suficiente considerar x em $\Re$, tal que:

a) $x = (\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$ b) $10 < x < 11$ c) $\sqrt{3} < x < 2$ d) $2 < x < 3$ e) $9 < x < 10$

22) (ITA-87) O número de soluções reais da equação: $\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \text{sen}^8 x + \text{sen}^{10} x = 5$ é:
a) um número maior que 12 b) zero c) 2
d) 10 e) 1

23) (ITA-87) O valor de x > 0 que satisfaz a equação $\sqrt{x} = \text{tg}\, \pi/12$ é:
a) $x = 4\sqrt{3}$ b) $x = 5 - 4\sqrt{3}$ c) $x = 7 - \sqrt{3}$
d) $x = 7 - 4\sqrt{3}$ e) $x = 9 - 4\sqrt{3}$

24) (ITA-87) Se $\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x = a \neq 0$, então cos 8x vale:
a) 2a b) a c) 4a d) zero e) a + 4

25) (ITA-87) Seja *a* um número real não nulo, satisfazendo $-1 \leq a \leq 1$. Se dois ângulos agudos em um triângulo são dados por arc sen *a* e arc sen 1/*a* então o seno trigonométrico do terceiro ângulo desse triângulo é:
a) 1/2 b) 1/3 c) $\sqrt{3}/2$ d) 1 e) $\sqrt{2}/2$

26) (ITA-87) O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é 2p. Nesse triângulo, a altura relativa à hipotenusa é:

a) $p\sqrt{2}$ d) $4p(\sqrt{2}-1)$
b) $(p+1)(\sqrt{3}-1)$ e) $8p(\sqrt{2}+4)$
c) $p(\sqrt{2}-1)$

27) (ITA-87) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta determinam um plano.
c) Se dois planos distintos tem um ponto em comum, tal ponto é único.
d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.
e) Se $\alpha$ é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta desse plano, que é paralela à r, não será paralela à s.

28) (ITA-87) Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas deste poliedro é:
a) 12 b) 18 c) 28 d) 30 e) 32

29) (ITA-87) Suponha que (I) é um cubo, tal que a medida de sua diagonal é a cm e admita que (II) é um cubo, cujo volume é o triplo do volume de (I). Designando por x a medida da diagonal de (II), concluímos que:
a) $x = a\sqrt{2}$ cm b) $x = a(1 + \sqrt{2})$ cm c) $x = a\sqrt[3]{2}$ cm
d) $x = a\sqrt[3]{3}$ cm e) $x = \sqrt[3]{3a}$ cm

30) (ITA-87) Seja (T) um cubo com aresta de medida *a*. Considere (P) a pirâmide que tem vértice no centro de uma face de (T) e como base a face oposta de (T). Sendo *x* a área lateral de (P), temos:
a) $x = a^2.\sqrt{3}$ b) $x = a^2.\sqrt{5}$ c) $x = (a + 1)^2.\sqrt{5}$
d) $x = (a + 1)^2.\sqrt{3}$ e) $x = (\sqrt{3} + \sqrt{5})a^2$

31) (ITA-87) Seja (P) um paralelepípedo retângulo de dimensões dadas por três números consecutivos. Se a área total de (P) é 10 $m^2$, então seu volume é:
a) $\sqrt{3}$ $m^3$ b) $\sqrt{5}$ $m^3$ c) $\sqrt{7}$ $m^3$
d) $\sqrt{2}$ $m^3$ e) $2\sqrt{3}$ $m^3$

32) (ITA-87) Considere (P) um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3 m e tem área total de 80 $m^2$. O lado dessa base quadrada mede:
a) 1 m b) 8 m c) 4 m d) 6 m e) 16 m

33) (ITA-87) A área lateral de um cilindro de revolução, de x metros de altura, é igual a área de sua base. O volume deste cilindro é:
a) $2\pi x^3$ $m^3$ b) $4\pi x^3$ $m^3$ c) $\sqrt{2}\,\pi x^3$ $m^3$
d) $\sqrt{3}\,\pi x^3$ $m^3$ e) $6\pi x^3$ $m^3$

34) (ITA-87) O desenvolvimento da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de raio a e ângulo central igual a 60º. O volume deste cone é:
a) $a^3/6$ b) $\pi\sqrt{35}\,a^3$ c) $\pi a^3/3$

d) $\pi(a/6)^3$ e) $[\pi(a/6)^3\sqrt{35}]/3$

35) A razão entre o volume de uma esfera de raio R e o volume de um cubo nela inscrito é:
a) $3(2)^{1/2}/2\pi$ b) $\pi/2$ c) $2\pi$ d) $\pi(2)^{1/2}/3$ e) $\pi(3)^{1/2}/2$

36) (ITA-87) Uma circunferência, tangente às retas de equações $2x - 3y + 9 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, tem seu centro sobre a reta $x + 2y - 10 = 0$. Encontre a equação dessa circunferência.

37) (ITA-87) Considere Q(x) e R(x), respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio A(x) pelo trinômio $B(x) = -x^2 + 5x - 6$. Admita que o grau de A(x) é quatro e que os restos da divisão de A(x) por $x + 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, 3 e $-1$. Supondo também que Q(x) é divisível por $x + 1$, obtenha R(x).

38) (ITA-87) Suponha x e y números reais, tais que:

$$\begin{cases} tg(x-y) = \sqrt{3} \\ (tgx)(tgy) = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número S = tgx + tgy

39) (ITA-87) Considere um trapézio isósceles de altura igual à base menor e de base maior igual ao triplo da menor. Sendo $\ell$ a medida de cada um dos lados não paralelos, calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação completa desse trapézio em torno de sua base maior.

40) (ITA-87) Supondo m uma constante real, $0 < m < 1$, encontre todos os números reais $x$, que satisfazem a inequação $\log_m(x^4 + m^4) \geq 2 + \log_m\left[\left(\frac{x}{2m}\right)^2 + m^2\right]$

# ITA 1987/1988

1) (ITA-88) Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto dos números reais. Então podemos afirmar que:
a) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$
b) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$
c) Se $A \subset B$ então $A^C \subset B^C$
d) $(A \cap B) \cup C^C = (A^C \cup C)^C \cap (B^C \cup C)^C$
e) $A \cup (B \cup C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$

2) (ITA-88) Seja f: IR $\rightarrow$ IR uma função estritamente decrescente, isto é, quaisquer x e y reais com $x < y$ tem-se que $f(x) > f(y)$. Dadas as afirmações:
I. f é injetora.
II. f pode ser uma função par.
III. se f possui inversa então sua inversa é estritamente decrescente.

Podemos assegurar que:
a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
c) apenas a afirmação (I) é falsa.
d) todas as afirmações são verdadeiras.
e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

3) (ITA-88) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por f($x$) = $ln$ ($x^2 - x$) e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Então o domínio de fog é:
a) ]0, e[
b) ]0, 1[
c) ]e, e + 1[
d) ] – 1, 1[
e) ]1, +∞[

4) (ITA-88) Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:
a) a = 1 e b = 6
b) a = 0 e b = - 6
c) a = 1 e b = - 6
d) a = 0 e b = - 9
e) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

5) (ITA-88) Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$, onde a e b são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:
a) uma delas é um imaginário puro.
b) os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $(|a + bi|)^{1/4}$.
c) o seu produto é um imaginário puro.
d) cada uma tem argumento igual a [arg(a + bi)]/4
e) a sua soma é zero.

6) (ITA-88) O número natural n tal que $(2i)^n + (1 + i)^{2n} = -16i$, onde i é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:
a) n = 6 b) n = 3 c) n = 7 d) n = 4 e) não existe n nestas condições

7) (ITA-88) Se P(x) e Q(x) são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que P(i) = 0 e Q(i) = 0 então podemos afirmar que:
a) P(x) é divisível por x + 1.
b) P(x) é divisível por x – 1.
c) P(x).Q(x) é divisível por $x^4 + 2x^2 + 1$.
d) P(x) e Q(x) são primos entre si.
e) Q(x) não é divisível por P(x).

8) (ITA-88) Suponha que os números 2, x, y e 1458 estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Desse modo o valor de x + y é:
a) 90 b) 100 c) 180 d) 360 e) 1460

9) (ITA-88) Sejam a, b e c constantes reais com a ≠ 0 formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre b e c é:

a) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$ b) $c = b(2-\sqrt{2})$ c) $c = b(\sqrt{2}-1)$

d) $c = b\sqrt{2}$ e) $c = \frac{b}{2}(4-\sqrt{2})$

10) (ITA-88) Seja $\alpha$ um número real, $\alpha > \sqrt{5}$ tal que $(\alpha + 1)^m = 2^p$, onde m é um inteiro positivo maior que 1 e $p = m[\log_2] [(\log_m (\alpha^2 - 5)]$. O valor de $\alpha$ é:
a) 3 b) 5 c) $\sqrt{37}$ d) 32
e) Não existe valor de $\alpha$ nestas condições

11) (ITA-88) Considere $A(x) = \log_{½} (2x^2 + 4x + 3)$, $\forall x \in IR$. Então temos:
a) $A(x) > 1$, para algum $x \in IR$, $x > 1$.
b) $A(x) = 1$, para algum $x \in IR$.
c) $A(x) < 1$, apenas para $x \in IR$ tal que $0 < x < 1$.
d) $A(x) > 1$, para cada $x \in IR$ tal que $0 < x < 1$.
e) $A(x) < 1$, para cada $x \in IR$.

12) (ITA-88) Seja $f(x) = \log_2 (x^2 - 1)$, $\forall x \in IR$, $x < -1$. A lei que define a inversa de f é:
a) $\sqrt{1+2^y}$, $\forall y \in IR$ b) $-\sqrt{1+2^y}$, $\forall y \in IR$
c) $1-\sqrt{1+2^y}$, $\forall y \in IR$ d) $-\sqrt{1-2^y}$, $\forall y \in IR$, $y \leq 0$
e) $1+\sqrt{1+2^y}$, $\forall y \in IR$, $y \leq 0$

13) (ITA-88) Seja a um número real com $0 < a < 1$. Então, os valores reais de x para os quais $a^{2x} - (a + a^2)a^x + a^3 < 0$ são:
a) $a^2 < x < a$ b) $x < 1$ ou $x > 2$ c) $1 < x < 2$
d) $a < x < \sqrt{a}$ e) $0 < x < 4$

14) (ITA-88) No desenvolvimento de $(1 + 3x)^m$, a razão entre os coeficientes dos termos de terceiro e primeiros graus em x é $6(m - 1)$. O valor de m é:
a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

15) (ITA-88) Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem 2n triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de n é:
a) 6 b) 8 c) 10 d) 20 e) Não existe polígono regular com esta propriedade.

16) (ITA-88) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \tan\pi & \sin\frac{2\pi}{5} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} \sec\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \\ \cos\pi & \cot\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}$$

Se a = det A e b = det B então o número complexo a + bi tem módulo igual a:
a) 1 b) $\sin 2\pi/5 + \cos 2\pi/5$ c) 4 d) $2(2)^{1/2}$ e) 0

17) (ITA-88) Seja A uma matriz real que possui inversa. Seja n um número inteiro positivo e $A^n$ o produto de matriz A por ela mesma n vezes. Das afirmações a verdadeira é:
a) $A^n$ possui inversa, qualquer que seja o valor de n

b) $A^n$ possui inversa apenas quando n = 1 ou n = 2.
c) $A^n$ possui inversa e seu determinante independe de n.
d) $A^n$ não possui inversa para valor algum de n, n > 1.
e) Dependendo da matriz A, a matriz $A^n$ poderá ou não ter inversa.

18) (ITA-88) Sobre o sistema $\begin{cases} 8x - y - 2z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

Podemos afirmar que:
a) é possível e determinado
b) é impossível
c) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que os números x, y, z formam nesta ordem, uma progressão aritmética de razão igual a x.
d) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que y = (x + z)/3
e) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que os números x, y, z formam nesta ordem, uma progressão aritmética de razão igual a (x + y + z)/3.

19) (ITA-88) A pergunta “Existe x real tal que os números reais $e^x$, $1 + e^x$, $1 - e^x$ são as tangentes dos ângulos internos de um triângulo?” admite a seguinte resposta:
a) Não existe x real nestas condições.
b) Todo x real, $x \geq 1$, satisfaz estas condições.
c) Todo x real, $x \leq -1$, satisfaz estas condições.
d) Todo x real, $-1 < x < 1$, satisfaz estas condições.
e) Apenas x inteiro par satisfaz estas condições.

20) (ITA-88) O conjunto imagem da função f: $[0, 1] \to [0, \pi]$ definida por f(x) = arc cos [(3x – 1)/2] é:
a) $\{0, \pi/4, 2\pi/3\}$ b) $[0, \pi]$ c) $[\pi/4, 3\pi/4]$
d) $[0, 2\pi/3]$ e) $[0, \pi/2]$

21) (ITA-88) Sobre a equação tg x + cotg x = 2 sen 6x, podemos afirmar que:
a) apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \pi/4$
b) apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \pi/2$
c) apresenta uma raiz no intervalo $\pi/2 < x < \pi$
d) apresenta uma raiz no intervalo $\pi < x < 3\pi/2$
e) não apresenta raízes reais

22) (ITA-88) Seja a equação $\text{sen}^3 x.\cos x - \text{sen}\, x.\cos^3 x = 1/m$ onde m é um número real não nulo.
Podemos afirmar que:
a) A equação admite solução qualquer que seja m, $m \neq 0$.
b) Se $|m| < 4$ esta equação não apresenta solução real.
c) Se $m > 1$ esta equação não apresenta solução real.
d) Se $|m| > 2$ esta equação sempre apresenta solução real.
e) Se $m < 4$ esta equação não apresenta solução real.

23) (ITA-88) A respeito da solução da equação

sen x + $\sqrt{3}$ cos x = 2, $0 \leq x < 2\pi$, podemos afirmar que:
a) existe apenas uma solução no primeiro quadrante
b) existe apenas uma solução no segundo quadrante
c) existe apenas uma solução no terceiro quadrante
d) existe apenas uma solução no quarto quadrante
e) existem duas soluções no intervalo $0 \leq x < 2\pi$

24) (ITA-88) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160º. Então o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:
a) 50  b) 60  c) 70  d) 80  e) 90

25) (ITA-88) Num triângulo ABC, BC = 4 cm, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:
a) 1 cm  b) $\sqrt{2}$ cm  c) 0,9 cm  d) $\sqrt{3}$ cm  e) 2 cm

26) (ITA-88) Por um ponto A de uma circunferência, traça-se o segmento AA' perpendicular a um diâmetro desta circunferência. Sabendo-se que o ponto AA' determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm, podemos afirmar que a medida do segmento AA' é:
a) 4 cm  b) 12 cm  c) 13 cm  d) 6 cm  e) $(13)^{1/2}$ cm

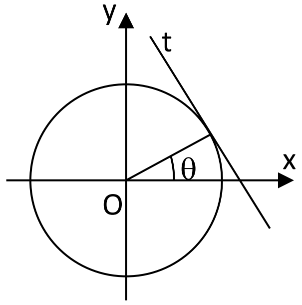
27) (ITA-88) Num losango ABCD, a soma dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede d cm então sua aresta medirá:
a) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$  b) $\dfrac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$  c) $\dfrac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
d) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$  e) $\dfrac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

28) (ITA-88) Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado L. A área da coroa circular formada por estas circunferências é:
a) $\pi L^2/4$  b) $\pi\sqrt{6}L^2/2$  c) $\pi\sqrt{3}L^2/3$
d) $\pi\sqrt{3}L^2$  e) $\pi L^2/2$

29) (ITA-88) Num triângulo ABC, retângulo em A, de vértices B: (t, 1) e C: (3, - 2), o cateto que contém o ponto B é paralelo à reta de equação 3x – 4y + 2 = 0. Então a reta que contém o cateto AC é dada por:
a) 4x + 3y – 6 = 0  b) 4x + 3y – 3 = 0
c) 3x – 4y + 1 = 0  d) 2x + 5y = 0
e) 4x – 3y + 6 = 0

30) (ITA-88) Sejam *a*, *b*, *c* e *d* números reais positivos tais que A: (9*a*, 3*b*), B: (–*c*, *d*), C: (*c*, –*d*) são os vértices de um triângulo equilátero. Então a equação da reta ***r***, que é paralela ao lado BC e passa pelo incentro do triângulo ABC é dada por:
a) $3ax + by = c - d$
b) $dx + cy = 3ad + bc$
c) $ax + by = 2c + 3d$
d) $2dx + 3ay = 4bc$
e) $dx - 2cy = 9a + 3b$

31) (ITA-88) A equação da reta t, tangente à circunferência de raio r no ponto P, conforme figura ao lado é dada por:




a) x.sen $\theta$ + y.cos $\theta$ = r  b) x.sen $\theta$ - y.cos $\theta$ = - r
c) x.cos $\theta$ - y.sen $\theta$ = - r  d) x.cos $\theta$ + y.sen $\theta$ = r
e) x.cos $\theta$ + y.sen $\theta$ = - r

32) (ITA-88) Duas retas r e s, concorrentes no ponto P: (1/2, –1/2 ), determinam na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ cordas AB e CD, respectivamente. Sabendo-se que r é dada pela equação x – y = 0, o valor de $\overline{PC}.\overline{PD}$ é:
a) 1/3  b) 2/5  c) 3  d) 1/2  e) 2
Nota: RS denota o segmento reto de extremos R e S enquanto que $\overline{RS}$ denota o comprimento deste segmento.

33) (ITA-88) A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo deste cone um ângulo de 45º. Sabendo-se que o perímetro da secção meridiana mede 2 cm, podemos afirmar que a área deste cone vale:
a) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-2)$ cm$^2$  b) $\pi(\sqrt{2}-1)$ cm$^2$
c) $\pi(\sqrt{3}-1)$ cm$^2$  d) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$ cm$^2$
e) $\pi(\sqrt{5}-1)$ cm$^2$

34) (ITA-88) As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces laterais têm comprimento $\ell$. O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. Então o volume desta pirâmide vale:
a) $3\sqrt{2}\ell^3$  b) $2\ell^3$  c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^3$  d) $\sqrt{2}\ell^3$  e) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ell^3$

35) (ITA-88) Considere uma pirâmide qualquer de altura h e de base B. Traçando um plano paralelo à base B, cuja distância ao vértice da pirâmide é 5h/7 cm, obtêm-se uma secção plana de área 7 cm$^2$. Então a área da base B da pirâmide vale:
a) $\sqrt{35}$ cm$^2$  b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ cm$^2$  c) $\frac{7\sqrt{7}}{5}$ cm$^2$
d) $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ cm$^2$  e) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ cm$^2$

36) (ITA-88) Sejam A(x) e B(x) polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios C(x) e D(x) tais que a igualdade a seguir se verifica: A(x).C(x) + B(x).D(x) = 1, $\forall$ x $\in$ R. Prove que A(x) não é divisível por B(x).

37) (ITA-88) Seja o sistema linear em x, y e z dado por
$\alpha x + y + 2z = 5$
$x + \beta y - 3z = -1$
onde $\alpha$ e $\beta$ são números reais. Analise para que valores de $\alpha$ e $\beta$ este sistema admite mais de uma solução.

38) (ITA-88) Seja A uma matriz quadrada inversível, de ordem 3. Seja B a matriz dos cofatores da matriz A. Sabendo-se que det A = -2 , calcule det B.

39) (ITA-88) Considere um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio 2 cm. Sabendo-se que a área do círculo, limitado pela circunferência formada por pontos de tangência entre as duas superfícies, é de $2\pi$ cm$^2$, calcule a altura deste cone.

40) (ITA-88) Determine o centro da circunferência, situada no primeiro quadrante, tangente aos eixos coordenados e tangente internamente à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

## ITA 1988/1989

1) (ITA-89) Os valores de $\alpha$, $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \pi/2$, para os quais a função f: IR$\to$IR dada por $f(x) = 4x^2 - 4x - tg^2\,\alpha$, assume seu valor mínimo igual a – 4, são:
a) $\pi/4$ e $3\pi/4$ b) $\pi/5$ e $2\pi/3$ c) $\pi/3$ e $2\pi/3$
d) $\pi/7$ e $2\pi/7$ e) $2\pi/5$ e $3\pi/5$

2) (ITA-89) Sejam A, B e C subconjuntos de $\Re$, não vazios, e $A - B = \{p \in \Re;\, p \in A \text{ e } p \notin B\}$. Dadas as igualdades:
1) $(A - B)\text{x}C = (A\text{x}C) - (B\text{x}C)$
2) $(A - B)\text{x}C = (A\text{x}B) - (B\text{x}C)$
3) $(A\cap B) - A \neq (B\cap A) - B$
4) $A - (B\cap C) = (A - B)\cup(A - C)$
5) $(A - B)\cap(B - C) = (A - C)\cap(A - B)$
Podemos garantir que:
a) 1 e 2 são verdadeiras
b) 1 e 5 são verdadeiras
a) 3 e 4 são verdadeiras
d) 1 e 4 são verdadeiras
e) 1 e 3 são verdadeiras

3) (ITA-89) Sejam A e B subconjuntos de IR, não vazios, possuindo M mais de um elemento. Dada uma função f: A$\to$B, definimos L: A$\to$AxB por L(a) = (a., f(a)), para todo a $\in$ A. Podemos afirmar que:
a) A função L sempre será injetora.
b) A função L sempre será sobrejetora.
c) Se f for sobrejetora, então L também o será

d) Se f não for injetora, então L também não o será
e) Se f for bijetora, então L será sobrejetora

4) (ITA-89) O valor da expressão $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo $z$ um número complexo, é:
a) 5, se $|z| \leq 1$
b) 4, se $|z| = 1$
c) 0, se $\text{Im}(z) = 0$
d) 2, para todo $z$
e) 3, se $\text{Re}(z) = 0$

5) (ITA-89) A equação da parábola, cujo eixo é perpendicular ao eixo x e que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax + 2y = 0$, com $a > 1$, e pelos pontos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ é:
a) $(a^2 - 1)y = a^2(x^2 - 1)$
b) $(a^2 - 1)y = a^2(1 - x^2)$
c) $(a^2 - 1)y = x^2 - 1$
d) $(a^2 - 1)y = a(x^2 - 1)$
e) $(a^2 - 1)y = -x^2 + 1$

6) (ITA-89) Considerando que a imagem da função arc sen é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e $i = \sqrt{-1}$, podemos garantir que arc sen $\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$ está definida:
a) apenas para x = 0 e vale $\pi/2$
b) para todo $x \in R$ e vale $\pi/2$
c) apenas para $x \in R$ tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de x.
d) apenas para $x \in R$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é $\pi$
e) apenas para $x \in R$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

7) (ITA-89) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:
a) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$ b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$ d) $2 + 2i$
e) não existe nenhum número complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

8) (ITA-89) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone será igual a
a) 6R/5 b) 3R/2 c) 4R/3 d) 2R/3 e) 7R/5

9) (ITA-89) Justapondo-se as bases de dois cones retos e idênticos de altura H, forma-se um sólido de volume v. Admitindo-se que a área da superfície deste sólido é igual a área da superfície de uma esfera de raio H e volume V, a razão v/V vale:
a) $\frac{\sqrt{11}-1}{4}$
b) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$
c) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$
d) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$
e) $\frac{\sqrt{19}-1}{4}$

10) (ITA-89) Os lados congruentes de um triângulo isósceles formam um ângulo de 30 graus e o lado oposto a este ângulo mede x cm. Este triângulo é a base de um pirâmide

de altura H cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume V, em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a
a) $2\pi x^2H$ b) $\pi x^2H/3$ c) $2\pi x^2H/3$ d) $3\pi x^2H$ e) $\pi x^2H$

11) (ITA-89) As circunferências $\mathbf{x^2 + y^2 = 2x}$ e $\mathbf{x^2 + y^2 = 4x}$ possuem um ponto comum P, distinto da origem. Obtenha a equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto P.
a) $5x + 10y = 16$
b) $5x + 15y = 20$
c) $5x + 5y = 12$
d) $3x + 4y = 8$
e) $10x + 5y = 20$

12) (ITA-89) A distância entre os pontos de interseção da reta $\frac{x}{10}+\frac{y}{20}=1$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$ é:
a) $16\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{7}$

13) (ITA-89) Seja ***s*** a reta do plano cartesiano, que passa pelo ponto (1, 3) e é perpendicular à reta $\boldsymbol{x + y + 1 = 0}$. Considere uma circunferência com centro na origem e raio $\boldsymbol{R} > 0$. Nestas condições, se ***s*** for tangente à circunferência, então:
a) R é um número irracional e $R < 1/2$
b) R é um número irracional e $1/2 < R < 1$
c) R é um número irracional e $R > 1$
d) R é um número racional e $R > 1$
e) R é um número racional e $R < 1$

14) (ITA-89) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima é:
a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,-\frac{9}{2}\right)$ b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3},-1\right)$ c) $\left(-\frac{3}{10},-1\right)$
d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,-2\right)$ e) (- 2, - 4)

15) (ITA-89) Se tg (2A) = 5 então $tg(\pi/4 + A) – tg(\pi/4 – A)$ é igual a:
a) – 40/21 b) – 2 c) 5 d) 8 e) 10

16) (ITA-89) Sobre a expressão $M=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_5 x}$, onde $2 < x < 3$, qual das afirmações abaixo está correta?
a) $1 \le M \le 2$ b) $2 < M < 4$ c) $4 \le M \le 5$
d) $5 < M < 7$ e) $7 \le M \le 10$

17) (ITA-89) Considere o desenvolvimento $(x + y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, onde *x* e *y* são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\frac{405}{2}(\log_k 2)^3$, para algum $k > 1$, $x=\frac{2\log_2 k}{\sqrt{\log_k 2}}$ e $y=\frac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso:
a) $k^2 = 2$ b) $k^2 = 3$ c) $k^3 = 2$ d) $k^3 = 7$ e) $k^3 = 5$

18) (ITA-89) Numa progressão geométrica de razão ***q*** sabemos que $\boldsymbol{a_1 = 1/q}$, $\boldsymbol{a_1 a_n} = (2/3)^5$ e o produto dos ***n*** primeiros termos é $\boldsymbol{q^{20}}$. Então a soma dos ***n*** primeiros termos é igual a:

a) $\frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ b) $\frac{1}{2}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ c) $\frac{1}{4}\frac{3^8-2^8}{3^6}$

d) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ e) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^8}$

19) (ITA-89) Numa progressão aritmética com n termos, $n > 1$, sabemos que o primeiro é igual a $(1 + n)/n$ e a soma deles vale $(1 + 3n)/2$. Então o produto da razão desta progressão pelo último termo é igual a:

a) $2n$ b) $2/n$ c) $3n$ d) $3/n$ e) $5n$

20) (ITA-89) Escreva e desenvolvimento do binômio $(\text{tg}^3 x - \text{cosec}^6 x)^m$, onde m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então P = – 64/9 quando x for igual a:

a) $x = \pi/3 + 2k\pi$, k inteiro

b) $x = \pm\pi/3 + k\pi$, k inteiro

c) $c = \pi/4 + k\pi$, k inteiro

d) $x = \pm\pi/6 + 2k\pi$, k inteiro

e) não existe x satisfazendo a igualdade desejada.

22) (ITA-89) Sendo A, B, C matrizes reais nxn, considere as seguintes afirmações:

1. A(BC) = (AB)C
2. AB = BA
3. A + B = B + A
4. det (AB) = det (A). det (B)
5. det (A + B) = det (A) + det (B)

Então podemos afirmar que:

a) 1 e 2 são corretas

b) 2 e 3 são corretas

c) 3 e 4 são corretas

d) 4 e 5 são corretas

e) 5 e 1 são corretas

23) (ITA-89) Considere a equação

$x\begin{bmatrix}4\\-16\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}7\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, onde x, y e z são números reais. É verdade que:

a) a equação admite somente uma solução

b) em qualquer solução, $x^2 = z^2$

c) em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$

d) em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$

e) em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$

24) (ITA-89) Sendo $A = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -3 & 2\\3 & -1 & -2\end{vmatrix}$ então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será:

a) 5/8 b) 9/11 c) 6/11 d) –2/13 e) 1/13

25) (ITA-89) Dadas as afirmações:
I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares
II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um quadrilátero são suplementares
III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango
Podemos garantir que:
a) todas são verdadeiras
b) apenas I e II são verdadeiras
c) apenas II e III são verdadeiras
d) apenas II é verdadeira
e) apenas III é verdadeira

26) (ITA-89) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:
a) 22 cm b) 5,5 cm c) 8,5 cm d) 11 cm e) 13 cm

27) (ITA-89) Numa circunferência de centro O, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero. Seja D um quarto da circunferência, não coincidente com os demais. Sobre a medida x do ângulo $A\hat{D}C$ podemos afirmar que:
a) 0º < x < 30º ou 60º < x < 120º
b) x = 60º ou x = 120º
c) x = 45º ou x = 150º
d) x = 240º para qualquer posição de D na circunferência
e) x = 30º para qualquer posição de D na circunferência

28) (ITA-89) Considere uma circunferência de centro O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo BCA meça 30°. Seja D o ângulo de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual a:
a) à metade da medida de AB
b) um terço da medida de AB
c) à metade da medida de AD
d) dois terços da medida de AB
e) à metade da medida de AE

29) (ITA-89) Se num quadrilátero convexo de área S, o ângulo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:
a) S b) 2S C) 3S D) 4S E) 5S

30) (ITA-89) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir 20x cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, então a área do círculo, em $cm^2$, será igual a:
a) $50\pi$ b) $75\pi$ c) $100\pi$ d) $125\pi$ e) $150\pi$

31) (ITA-89) Sabendo-se que x e y são tais que x + y = $3\pi/4$, verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 2.\text{tgx} & 1+\text{tgx} \\ 1+\text{tgy} & \text{tgy} \end{bmatrix}$ é ou não inversível.

32) (ITA-89) Sejam f, g: IR→IR duas funções tais que:
a) gof: IR→IR é injetora. Verifique se f é injetora e justifique sua resposta.
b) gof: IR→IR é sobrejetora. Verifique se g é sobrejetora e justifique sua resposta.

33) (ITA-89) Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro do ponto (5, 0) e extremidade em cada uma das retas x – 2y – 3 = 0 e x + y + 1 = 0. Dê a resposta na forma Ax + By + C = 0.

34) (ITA-89) Num triângulo ABC, D é um ponto médio do segmento AC e E é um ponto do segmento AB. Sabendo-se que AB = 3AE, determine a razão entre a área do quadrilátero BCDE e a do triângulo ADE.

35) (ITA-89) O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede ***L*** cm. A altura do tronco é igual à metade do apótema desta mesma base. As faces laterais formam um ângulo de 30 graus com a base. Calcule o apótema (***a***), o lado (***l***), ambos da base menor, a altura(***h***) da face lateral e a área total (***S***) do tronco, todos em função de ***L***.

## ITA 1989/1990

1) (ITA-90) Dadas as funções f(x) = $\frac{1+e^x}{1-e^x}$, X $\in \Re$ - {0} e g(x) = x sen x, x $\in$ IR, podemos afirmar que:
a) ambas são pares. b) f é par e g é ímpar.
c) f é ímpar e g é par. d) f não é par e nem ímpar e g é par.
e) ambas são ímpares.

2) (ITA-90) Seja f: $\Re \rightarrow \Re$ a função definida por f(x)=$\begin{cases} x+2, \text{se } x \leq -1 \\ x^2, \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 4, \text{se } x > 1 \end{cases}$

Lembrando que se A$\subset \Re$ então $f^{-1}$(A) = {x $\in \Re$:f(x) $\in$ A} considere as afirmações:
I- f não é injetora e $f^{-1}$ ([3 , 5]) = {4}
II- f não é sobrejetora e $f^{-1}$ ([3 , 5]) = $f^{-1}$ ([2 , 6])
III- f é injetora e $f^{-1}$ ([0 , 4]) = [ – 2 , +∞[
Então podemos garantir que:
a) Apenas as afirmações II e III são falsas;
b) As afirmações I e III são verdadeiras;
c) Apenas a afirmação II é verdadeira;
d) Apenas a afirmação III é verdadeira;
e) Todas as afirmações são falsas.

3) (ITA-90) Seja a função f: $\Re - \{2\} \rightarrow \Re - \{3\}$ definida por f(x) = $\frac{2x-3}{x-2}+1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:
a) não está definida pois f é não injetora.
b) não está definida pois f não é sobrejetora.
c) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{y-3}, y \neq 3$.
d) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y+5}{y-3} - 1, y \neq 3$.
e) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{2y-5}{y-3}, y \neq 3$.

4) (ITA-90) Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2 + i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja $S_1$ o conjunto das raízes da primeira equação e $S_2$ o da segunda. Então
a) $S_1 \cap S_2$ é vazio;
b) $S_1 \cap S_2 \subset R$;
c) $S_1$ possui apenas dois elementos distintos;
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário;
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

5) (ITA-90) A igualdade $1 + |z| = |1+z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
a) Para todo $z \in C$ tal que Rez = 0 e Imz<0;
b) Para todo $z \in C$ tal que Rez $\geq$ 0 e Imz = 0;
c) Para todo $z \in C$ tal que $|z|=1$;
d) Para todo $z \in C$ tal que Imz = 0;
e) Para todo $z \in C$ tal que $|z|<1$.
Nota : C denota o conjunto dos números complexos, Rez a parte real de z e Imz a parte imaginária de z.

6) (ITA-90) Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + ... + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação p(x) = 0 admite mais do que uma raiz real e ainda, a + bi é uma raiz complexa desta equação com ab $\neq$ 0. Sabendo-se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de p(x) = 0 e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{6}$, o valor de $\alpha$ é:
a) 32 b) 56 c) 71 d) 11 e) 0

7) (ITA-90) O conjunto das soluções reais da equação
$|\ln(\text{sen}^2 x)| = \ln(\text{sen}^2 x)$ é dado por:
a) $\{x \in \Re : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$
b) $\{x \in \Re : x = \pi + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
c) $\{x \in \Re : x = 2k\pi, k \in Z\}$
d) $\{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1\}$
e) $\{x \in \Re : x \geq 0\}$

8) (ITA-90) Sabendo-se que $3x - 1$ é fator de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ então as soluções reais da equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$ somam:

a) $-\log_3 12$  b) 1  c) $-\frac{1}{3}\log_3 12$  d) $-1$  e) $\log_3 7$

9) (ITA-90) Numa progressão geométrica de três termos a razão é $e^{-2a}$, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

a) $\ln\sqrt{2}$  b) $-\ln\frac{5}{2}$  c) $\ln\sqrt{3}$  d) $-\ln\sqrt{2}$

e) não existe número real a nestas condições

10) (ITA-90) Sejam as funções f e g dadas por:

f: $\Re \to \Re$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$

g: $\Re - \{1\} \to \Re$, $g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

Sobre a composta $(fog)(x) = f(g(x))$ podemos garantir que:

a) se $x \geq \frac{3}{2}$, $f(g(x)) = 0$  b) se $1 < x < \frac{3}{2}$, $f(g(x)) = 1$

c) se $\frac{4}{3} < x < 2$, $f(g(x)) = 1$  d) se $1 < x \leq \frac{4}{3}$, $f(g(x)) = 1$

e) n.d.a

11) (ITA-90) Sejam os números reais $\alpha$ e x onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$. Se no desenvolvimento de

$((\cos\alpha)x + (\text{sen}\,\alpha)\frac{1}{x})^8$ o termo independente de x vale $\frac{35}{8}$, então o valor de $\alpha$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$  b) $\frac{\pi}{3}$  c) $\frac{\pi}{12}$  d) $\frac{\pi}{4}$  e) n.d.a.

12) (ITA-90) Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \text{ tg } t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \leq t \leq \pi/2$. Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2, x \geq a$  b) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2, x \geq 1$

c) $y = \frac{b}{a^2}(x-1), \forall x \in \Re$  d) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1), x \geq 1$

e) $y = \frac{a^2}{b^2}(x-1), x \leq 1$

13) (ITA-90) Sabendo-se que $\theta$ é um ângulo tal que $2\,\text{sen}(\theta - 60^o) = \cos(\theta + 60^o)$, então tg $\theta$ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ onde

a) a e b são reais negativos;  b) a e b são inteiros;

c) a + b = 1;  d) a e b são pares;

e) $a^2 + b^2 = 1$.

14) (ITA-90) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} \text{sen}\,x & 2 \\ \log_3 10 & 2\text{sen}x \end{bmatrix}$ onde x é real. Então podemos afirmar que:
a) A é inversível apenas para x > 0;
b) A é inversível apenas para x = 0;
c) A é inversível para qualquer x;
d) A é inversível apenas para x da forma $(2k + 1)\pi$ , k inteiro;
e) A é inversível apenas para x da forma $2k\pi$, k inteiro.

15) (ITA-90) Sejam A, B e C matrizes quadradas n x n tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$ , onde $A^t$ é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:
a) C é inversível e det C = $\det(AB)^{-1}$;
b) C não é inversível pois det C = 0;
c) C é inversível e det C = det B;
d) C é inversível e det C = $(\det A)^2$. det B;
e) C é inversível e det C = $\frac{\det A}{\det B}$.
Nota: det X denota o determinante da matriz quadrada X.

16) (ITA-90) Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um qualquer dos sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguintes afirmações:
I- Dois sistemas de equações lineares 3x3, ambos homogêneos, são equivalentes.
II- Dois sistemas de equações lineares, 3x3, ambos indeterminados, não são equivalentes.
III- Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 8 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:
a) As três afirmações são verdadeiras;
b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
e) As três afirmações são falsas.

17) (ITA-90) Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas $x_1$ , $x_2$ , ..., $x_n$ dado por

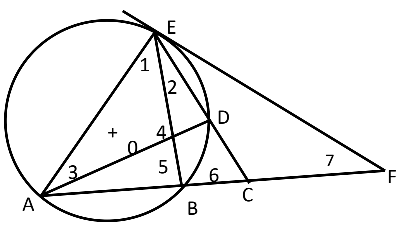
$$\begin{cases} a_1x_1 + (a_1 + 1)x_2 + \ldots + (a_1 + n - 1)x_n = 0 \\ a_2x_1 + (a_2 + 1)x_2 + \ldots + (a_2 + n - 1)x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + (a_n + 1)x_2 + \ldots + (a_n + n - 1)x_n = 0 \end{cases}$$

onde $a_1$ , $a_2$ , ..., $a_n$ são números reais dados. Sobre a solução deste sistema podemos afirmar que:
a) Se $a_i > 0$ , i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
b) Se $a_i < 0$ , i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
c) Se $a_i > 0$ , i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;
d) Se $a_i < 0$ , i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;

e) O sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números $a_1$ , ..., $a_n$ dados.

18) (ITA-90) Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era:
a) 99   b) 95   c) 135   d) 87   e) n.d.a.

19- (ITA-90) Na figura abaixo 0 é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49º, 18º, 34º, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.
a) 97º, 78º , 61º, 26º   b) 102º, 79º, 58º, 23º
c) 92º, 79º, 61º, 30º   d) 97º, 79º, 61º, 27º
e) 97º, 80º, 62º, 29º




20) (ITA-90) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações $3x - 4y + 12 = 0$ e $3x - 4y + 4 = 0$. Considere ( $\ell$ ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve ( $\ell$ ) é dada por:
a) $3x - 4y + 8 = 0$   b) $3x + 4y + 8 = 0$   c) $x - y + 1 = 0$
d) $x + y = 0$   e) $3x - 4y - 8 = 0$

21) (ITA-90) Seja C o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}\,y = 0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}\,x$ . Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:

a) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

d) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) n.d.a.

22) (ITA-90) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto ( $\frac{1}{4},\frac{1}{6}$ ) à reta (r) é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ c) $3\sqrt{13}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

23) (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio x cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em $cm^3$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$ e) n.d.a.

24) (ITA-90) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) n.d.a.

25) (ITA-90) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades $x - y \le 1$, $x + y \ge 1$ e $(x-1)^2 + y^2 \le 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:

a) $\frac{4}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$ d) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ e) n.d.a.

# ITA 1990/1991

1) (ITA-91) Considere as afirmações:

I- Se $f: \Re\to\Re$ é uma função par e $g:\Re\to\Re$ uma função qualquer, então a composição gof é uma função par.

II- Se $f: \Re\to\Re$ é uma função par e $g: \Re\to\Re$ uma função ímpar, então a composição fog é uma função par.

III- Se $f: \Re\to\Re$ é uma função ímpar e inversível então $f^{-1}: \Re\to\Re$ é uma função ímpar.

Então:

a) Apenas a afirmação I é falsa;

b) Apenas as afirmações I e II são falsas;

c) Apenas a afirmação III é verdadeira;

d) Todas as afirmações são falsas;

e) n.d.a.

2) (ITA-91) Sejam $a \in \Re$, $a > 1$ e $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$ . A função inversa de f é dada por:

a) $\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1})$, para $x > 1$

b) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \Re$

c) $\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \Re$

d) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 - 1})$, para $x < -1$

e) nda

3) (ITA-91) Seja $\Re \to \Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \le 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{ se } x \ge 1 \end{cases}$$

Se D é um subconjunto não vazio de $\Re$ tal que $f: D \to \Re$ é injetora, então:

a) $D = \Re$ e $f(D) = [-1, +\infty[$

b) $D = ]-\infty, 1] \cup ]e, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, +\infty[$

c) $D = [0, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, +\infty[$

d) $D = [0, e]$ e $f(D) = [-1, 1]$

e) n.d.a.

**Notação:** $f(D) = \{y \in \Re: y = f(x), x \in D\}$ e ln x denota o logaritmo neperiano de x.

**Observação:** esta questão pode ser resolvida graficamente.

4) (ITA-91) Sejam $w = a + bi$ com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \Re$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:

a) Um par de retas paralelas.

b) Uma circunferência.

c) Uma elipse.

d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.

e) n.d.a.

5) (ITA-91) Se $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $w = \frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$ b) $i \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ c) $i \operatorname{cotg} t$

d) $i \operatorname{tg} t$ e) n.d.a.

6) (ITA-91) Os valores de m de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:

a) 0 b) $\sqrt{3}$ e 3 c) 1 e $-1$

d) 2 e $-2$ e) nda

7) (ITA-91) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$ . Podemos afirmar que:

a) $S \subset ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[$

b) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]0, 1[ \cup ]3, 4[$
c) $S \subset [0, 4]$
d) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]3, 4[$
e) n.d.a.

8) (ITA-91) Considere as afirmações:
I - A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só admite raízes reais.
II - Toda equação recíproca admite um número par de raízes.
III - As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$. São exatamente o dobro das raízes de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ .
Então:
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é falsa.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Todas são verdadeiras.
e) n.d.a.

9) (ITA-91) Se $A = \{x \in \Re: |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|\}$, então temos:
a) $A = [-2, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty[$
b) $A = [\frac{1}{2}, 4]$
c) $A = [-3, 1]$
d) $A = ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$
e) n.d.a.

10) (ITA-91) Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto $-6$. Sabe-se que $(b_4, b_3, b_2, b_1)$ é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar:
a) $b_3 + a_3 = 10$ b) $b_4 + a_4 = 6$ c) $b_3 + b_0 = 12$
d) $b_4 + b_1 = 16$ e) n.d.a.

11) (ITA-91) Numa progressão geométrica de razão q, sabe-se que:
I- o produto do logaritmo natural do primeiro termo $a_1$ pelo logaritmo natural da razão é 24.
II- a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.
Se ln q é um número inteiro então o termo geral $a_n$ vale:
a) $e^{6n-2}$ b) $e^{4+6n}$ c) $e^{24n}$ d) $e^{4+6n}$ e) nda
**Notação:** ln q denota o logaritmo natural (ou neperiano) de q

12) (ITA-91) O conjunto dos números reais que verificam a inequação $3\log x + \log (2x + 3)^3 \leq 3 \log 2$, é dado por:
a) $\{x \in \Re: x > 0\}$ b) $\{x \in \Re: 1 \leq x \leq 3\}$
c) $\{x \in \Re: 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$ d) $\{x \in \Re: \frac{1}{2} \leq x < 1\}$
e) n.d.a.
**Notação:** log ***a*** denota o logaritmo de ***a*** na base 10

13) (ITA-91) Sejam A = $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 3^k$ e B = $\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} 11^k$.

Se ln B – ln A = $\ln \frac{6561}{4}$ então n é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n.d.a.

14) (ITA-91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química ?

a) 875 b) 1877 c) 1995 d) 2877 e) n.d.a.

15) (ITA-91) Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que a matriz mA + nB seja não inversível é necessário que:

a) m e n sejam positivos.
b) m e n sejam negativos.
c) m e n tenham sinais contrários.
d) $n^2 = 7m^2$ .
e) n.d.a.

16) (ITA-91) Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$.
Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:

a) $B^2$ é a matriz nula. b) $B^2 = -2I$.
c) B é simétrica. d) B é anti-simétrica.
e) n.d.a.

**Notações:** $M^t$ e $M^{-1}$ denotam, respectivamente a matriz transposta de M e a matriz inversa de M. Por I denotamos a matriz identidade de ordem n.

17) (ITA-91) Considere o sistema:

$$(P) \begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que (P) é possível e determinado quando:

a) $k \neq 0$ b) $k \neq 1$ c) $k \neq -1$
d) $k \neq 0$ e $k \neq -1$ e) n.d.a.

18) (ITA-91) Se (x , y , z , t) é solução dos sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

Qual das alternativas abaixo é verdadeira ?

a) x + y + z + t e x tem o mesmo sinal.
b) x + y + z + t e t tem o mesmo sinal.
c) x + y + z + t e y tem o mesmo sinal.

d) x + y + z + t e z tem sinais contrários.
e) n.d.a.

19) (ITA-91) Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente. Sabendo que a = $2\sqrt{3}$ e (A,B,C) é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:
a) C = $4\sqrt{3}$ e A = 30º b) C = $3\sqrt{3}$ e A = 30º
c) B = 6 e C = 85º d) B= 3 e C = 90º
e) n.d.a.

20) (ITA-91) Se $a \in \Re$ com a > 0 e arc sen $\frac{a-1}{a+1}$ está no primeiro quadrante, então o valor de
tg [arc sen $\frac{a-1}{a+1}$ + arc tg $\frac{1}{2\sqrt{a}}$] é:
a) $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$ b) $\frac{a\sqrt{a}}{3a+1}$ c) $\frac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$
d) $\frac{2a}{3a+1}$ e) n.d.a.

21) (ITA-91) Sejam a e b constantes reais positivas. Para que a equação $\cos^3 x + (a - 1)\cos^2 x - (a + b)\cos x + b = 0$ tenhas duas raízes reais distintas no intervalo $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ devemos ter:
a) $0 < b \leq a - 1$ b) $0 < b < a + 1$ c) $a < b < a + 2$
d) $a + 1 < b \leq a + 2$ e) n.d.a.

22) (ITA-91) Considere a região ao plano cartesiano xy definido pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta y + x + 1 = 0, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:
a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{9}$ e) n.d.a.

23) (ITA-91) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem $\ell$ cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:
a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ell^3 cm^3$ b) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3 cm^3$ c) $\frac{\sqrt{3}}{24}\ell^3 cm^3$
d) $\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 cm^3$ e) n.d.a.

24) (ITA-91) Seja r a mediatriz do segmento de reta de extremos M = ( – 4 , – 6) e N = (8 , – 2). Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta r. Então:
a) R = $\frac{\sqrt{7}}{3}$ b) R= $\frac{\sqrt{15}}{3}$ c) R= $\frac{\sqrt{10}}{3}$
d) R = $\frac{\sqrt{10}}{5}$ e) n.d.a.

25) (ITA-91) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se P = (a , b) é o ponto em C mais próximo da origem, então:

a) $a = -\frac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$

b) $a = -\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$

c) $a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e $b = 3a$

d) $a = -1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $b = 3a$

e) n.d.a.

## ITA 1991/1992

1) (ITA-92) Considere as funções $f:\Re^* \to \Re$, $g:\Re \to \Re$, e $h:\Re^* \to \Re$ definidas por: $f(x) = 3^{x+\frac{1}{x}}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 81/x$. O conjunto dos valores de x em $\Re^*$ tais que $(f\circ g)(x) = (h\circ f)(x)$, é subconjunto de:
a) [0, 3] b) [3, 7] c) [-6, 1] d) [-2, 2] e) n.d.a.

2) (ITA-92) O domínio da função: $f(x) = \log_{2x^2-3x+1}(3x^2 - 5x + 2)$ é:
a) $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1/2) \cup (1, 5/2) \cup (5/2, +\infty)$
c) $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, 2/3) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
e) n.d.a.

3) (ITA-92) Dadas as funções $f:\Re \to \Re$ e $g:\Re \to \Re$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere h = fog. Então podemos afirmar que:
a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
c) h é estritamente crescente, mas não necessariamente inversível.
d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
e) nda

4) (ITA-92) Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $(0, \pi/2)$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais $z^6$ é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:
a) 4 b) $4/\sqrt{3}$ c) 8 d) $8/\sqrt{3}$ e) n.d.a.

5) (ITA-92) Sabe-se que $2(\cos \pi/20 + i \operatorname{sen} \pi/20)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:
a) $\{2^{1/2}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/8), 2^{1/2}(\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/8)\}$
b) $\{2^{1/2}(\cos 9\pi/8 + i \operatorname{sen} 9\pi/8), 2^{1/2}(\cos 5\pi/8 + i \operatorname{sen} 5\pi/8)\}$
c) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/4), 2^{1/4}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)\}$
d) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/8), 2^{1/4}(\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/4)\}$

e) n.d.a.

6) (ITA-92) Considere a equação:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{onde:}$$

$F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2}$ e $G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, com $x \in R$, $x \neq 0$. Sobre as raízes reais dessa equação, temos:

a) Duas delas são negativas.
b) Uma delas é um número irracional.
c) Uma delas é um número par.
d) Uma delas é positiva e outra negativa.
e) n.d.a.

7) (ITA-92) Sejam a e b constante reais. Sobre a equação: $x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$ podemos afirmar que:

a) Não possui raiz real se $a < b < -3$.
b) Não possui raiz real se $a > b > 3$.
c) Todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| \geq 2$.
d) Possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.
e) n.d.a.

8) (ITA-92) Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$. Sabe-se que $a_1 a_n = 243$, $\log_q a_n$ e $\log_q a_n = 6$, onde na é o enésimo termo de progressão geométrica e $a_n$ é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\dfrac{3^9 - 1}{6}$ b) $\dfrac{3^{10} - 1}{6}$ c) $\dfrac{3^8 - 1}{6}$ d) $\dfrac{3^9 - 1}{3}$ e) n.d.a.

9) (ITA-92) Sejam a, b, c, d números reais não nulos que estão nesta ordem em progressão aritmética. Sabendo que o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4.2^a.x + 2^c.y = \dfrac{2}{3}.2^b \\ 3^d.x + 9.3^b.y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:

a) 13 b) 16 c) 28 d) 30 e) n.d.a.

10) (ITA-92) Seja $A \in M_{3x3}$ tal que det A = 0. Considere as afirmações:

I- Existe $X \in M_{3x1}$ não nula tal que AX é identicamente nula.
II- Para todo $Y \in M_{3x1}$, existe $X \in M_{3x1}$ tal que AX = Y.
III- Sabendo que $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}$ então a primeira linha da transposta de A é $\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Temos que:

a) Todas são falsas.
b) Apenas II é falsa.
c) Todas são verdadeiras.

d) Apenas I e II são verdadeiras.
e) n.d.a.

11) (ITA-92) Seja C = { $X \in M_{2x2}$; $X^2 + 2X = 0$}. Dadas as afirmações:
I- Para todo $X \in C$ e C, (X + 2I) é inversível.
II- Se $X \in C$ e $\det(X + 2I) \neq 0$ então X não é inversível.
III- Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$ então $\det X > 0$.
Podemos dizer que:
a) Todas são verdadeiras.
b) Todas são falsas.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas I é verdadeira.
e) n.d.a.

12) (ITA-92) A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m = 64$ é válida para:
a) Quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
b) Qualquer que seja n natural positivo e m = 3.
c) n = 13 e m = 6.
d) n ímpar e m par.
e) n.d.a.

13) (ITA-92) No desenvolvimento $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com 1/10 do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = (1/4)^{z - 1/2}$, então:
a) $z \in [0, 1]$ b) $z \in (20, 50)$ c) $z \in (-\infty, 0]$
d) $z \in [1, 15]$ e) n.d.a.

14) (ITA-92) Seja $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\operatorname{sen} x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:
a) $]0, \pi/3] \cup [2\pi/3, 2\pi)$ b) $[0, 7\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi)$
c) $[0, 4\pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi)$ d) $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi)$
e) n.d.a.

15) (ITA-92) Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que cos x = 5/6 e cos y = 4/5, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + sen^2\alpha}$, temos que:
a) $\alpha$ está no 4º quadrante e T = 2/3.
b) $\alpha$ está no 1º quadrante e T = 2/3.
c) $\alpha$ está no 1º quadrante e $T = 2/3 + \sqrt{11}/10$.
d) $\alpha$ está no 4º quadrante e $T = 2/3 - \sqrt{11}/10$.
e) n.d.a.

16) (ITA-92) Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60^o$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm b) $1+\sqrt{3}$ cm c) $2+\sqrt{3}$ cm

d) $1+2\sqrt{2}$ cm e) n.d.a.

17) (ITA-92) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta y = mx, m > 0, forma com o eixo dos x é:

a) $y = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$ b) $y = \frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

c) $y = \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$ d) $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

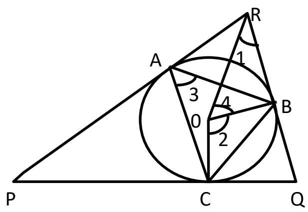
e) n.d.a.

18) (ITA-92) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cuja apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

a) ½ b) 1 c) 1/3 d) 3/8 e) n.d.a.

19) (ITA-92) Considere o triângulo PQR ao lado, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20º. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:

a) 40º, 120º, 60º e 50º.
b) 40º, 100º, 50º e 40º.
c) 60º, 140º, 60º e 40º.
d) 60º, 120º, 40º e 50º.
e) n.d.a.




20) (ITA-92) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288º. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

a) $16\pi$ cm² b) $\frac{308\pi}{9}$ cm² c) $\frac{160\pi}{3}$ cm²

d) $\frac{100\pi}{9}$ cm² e) n.d.a.

21) (ITA-92) Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, h cm e H cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de 1/3 em relação ao seu volume original. Deste modo:

a) 2H = 3h b) H = 2h c) H = 3h d) 2H = 5h e) n.d.a.

22) (ITA-92) Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:
a) $\pi(1 + \sqrt{5})^2R^2/4$ cm$^2$. b) $\pi\ \sqrt{5}(1 + \sqrt{5})^2R^2/4$ cm$^2$.
c) $\pi\ \sqrt{5}(1 + \sqrt{5})R^2/4$ cm$^2$. d) $\pi\ \sqrt{5}(1 + \sqrt{5})^2R^2$ cm$^2$.
e) n.d.a.

23) (ITA-92) Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é: M: (2, 2). O comprimento de AB (em unidade de comprimento) é igual a:
a) $2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $2\sqrt{3}$ e) n.d.a.

24) (ITA-92) Dados os pontos A: (0, 8), B: (– 4, 0) e C: (4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ S. Considere $P_1$ e $P_2$ os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s , respectivamente. Então a equação da reta que passa por $P_1$ e $P_2$ é:
a) $y + x = 5$ b) $y + 2x = 5$ c) $3y - x = 5$
d) $y + x = 2$ e) n.d.a.

25) (ITA-92) Considere as afirmações:
I- Uma elipse tem como focos os pontos $F_1$: (– 2, 0), $F_2$: (2, 0) e o eixo maior 12. Sua equação é $x^2/36 + y^2/32 = 1$.
II- Os focos de uma hipérbole são $F_1$: $(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2$: $(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade $\sqrt{10}/2$. Sua equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.
III- A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto P: (5, 125/2).
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações II e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação III é verdadeira.
e) n.d.a.

# ITA 1992/1993

1) (ITA-93) Seja ***a*** o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:
a) 10/11 b) –2 c) 5/8 d) 3/8 e) /15

2) (ITA-93) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2 + z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:
a) nenhuma delas é um número inteiro.
b) a soma delas é dois.
c) estas são em número de 2 e são distintas.
d) estas são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.
e) uma delas é da forma z = bi com b real não-nulo.

3) (ITA-93) O conjunto solução da inequação
$\log_x [(1 - x)x] < \log_x [(1 + x)x^2]$ é dado por:
a) $1 < x < 3/2$ c) $0 < x < (\sqrt{2} - 1)/2$ e) $0 < x < \sqrt{2} - 1$
b) $0 < x < 1$ d) $0 < x < \sqrt{2}/2$

4) (ITA-93) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um $\alpha$ e outro $2\alpha$. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo, é:
a) $1/\cos 2\alpha$ b) $1/\text{sen } 2\alpha$ c) $1/(2\text{sen } \alpha)$
d) $1/(2\cos \alpha)$ e) $\text{tg } \alpha$

5) (ITA-93) O conjunto das soluções da equação sen 5x = cos 3x contém o seguinte conjunto:
a) $\{\pi/16 + k\pi/5, k \in Z\}$ b) $\{\pi/16 + k\pi/3, k \in Z\}$
c) $\{\pi/4 + k\pi/3, k \in Z\}$ d) $\{\pi/4 + k\pi/2, k \in Z\}$
e) $\{\pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$

6) (ITA-93) Num triângulo ABC, retângulo em A, seja a projeção de A sobre BC. Sabendo-se que o segmento BC mede 1 cm e que o ângulo DÂC mede $\theta$ graus, então a área do triângulo ABC vale:
a) $(l^2/2) \sec \theta \text{ tg } \theta$ b) $(l^2/2) \sec^2 \theta \text{ tg } \theta$
c) $(l^2/2) \sec \theta \text{ tg}^2 \theta$ d) $(l^2/2) \text{cossec } \theta \text{ tg } \theta$
e) $(l^2/2) \text{cossec}^2 \theta \text{ cotg } \theta$

7) (ITA-93) Seja $\Re \to \Re$ uma função não nula, ímpar e periódica de período p. Considere as seguintes afirmações:
I. $f(p) \neq 0$
II. $f(-x) = -f(x + p), \forall x \in R$
III. $f(-x) = f(x - p), \forall x \in R$
IV. $f(x) = -f(-x), \forall x \in R$
Podemos concluir que:
a) I e II são falsas.
b) I e III são falsas.
c) II e III são falsas.
d) I e IV são falsas.
e) II e IV são falsas.

8) (ITA-93) Analisando o sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$ concluímos que este é:
a) possível e determinado com xyz = 7
d) possível e indeterminado
b) possível e determinado com xyz = -8
e) impossível
c) possível e determinado com xyz = 6

9) (ITA-93) Dadas as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 0 \\ y & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & y \\ 0 & 8 & 2 \\ x & 3 & x - 2 \end{bmatrix}$, analise as afirmações:

I. $A = B \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = 0$

II. $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 2$ e $y = 1$.

III. $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 1$

e conclua:
a) apenas a afirmação II é verdadeira
b) apenas a afirmação I é verdadeira
c) as afirmações I e II são verdadeiras
d) todas as afirmações são falsas
e) apenas a afirmação I é falsa

10) (ITA-93) Seja a matriz 3x3 dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que B é a inversa de A, então a soma dos elementos de B vale:
a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) – 2

11) (ITA-93) Sabendo-se que a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} = 0$ é $\frac{-8}{3}$ e que S é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:
a) $S \subset [-17, -1]$
b) $S \subset [1, 5]$
c) $S \subset [-1, 3]$
d) $S \subset [-10, 0]$
e) $S \subset [0, 3]$

12) (ITA-93) Um acidente de carro foi presenciado por 1/65 da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que soube do acontecimento t horas após é dado por: $f(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, onde B é a população da cidade. Sabendo-se que 1/9 da população soube do acidente 3 horas após, então o tempo que se passou até que 1/5 da população soubesse da notícia foi de:
a) 4 horas
b) 5 horas
c) 6 horas
d) 5 horas e 24 min
e) 5 horas e 30 min

13) (ITA-93) Numa progressão aritmética com ***2n + 1*** termos, a soma dos ***n*** primeiros é igual a 50 e a soma dos ***n*** últimos é 140. Sabendo-se que a razão desta progressão é um inteiro entre 2 e 13, então seu último termo será igual a:
a) 34 b) 40 c) 42 d) 48 e) 56

14) (ITA-93) A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão ***r*** é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão ***q*** é 12. Se ambas

as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $\boldsymbol{q = r^2}$, podemos afirmar que a soma dos 4 primeiros termos da progressão geométrica será:
a) 623/11 b) 129/32 c) 25/2 d) 765/64 e) 13

15) (ITA-93) Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

16) (ITA-93) Analisando as afirmações classificando-as em verdadeira ou falsa:
I. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21.
II. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a sete pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140.
III. Para todo natural $n$, $n \geq 5$, $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$.
Você concluiu que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas II e III são verdadeiras
c) apenas III é verdadeira
d) todas são verdadeiras
e) todas são falsas

17) (ITA-93) Sabendo-se que a equação de coeficientes reais
$x^6 - (a + b + c)x^5 + 6x^4 + (a - 2b)x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$
é uma equação recíproca de segunda classe, então o número de raízes reais desta equação desta equação é:
a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

18) (ITA-93) Considere a equação de coeficientes reais
$x^5 + mx^4 + 2\frac{P}{m}x^3 - 316x^2 + 688x + P = 0$, $m \neq 0$ para a qual $1 + 3i$ é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira $q$ cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que $P/m$ é igual a:
a) 20 b) 30 c) 40 d) 120 e) 160

19) (ITA-93) Calculando-se a área da região limitada por $y \leq 3(x + 2)/2$ e $x^2 + (y - 3)^2 \leq 13$, obtém-se:
a) $2\sqrt{13}\pi$ b) $13\pi$ c) $(13\pi)/2$
d) $(3\sqrt{13}\pi)/2$ e) $\sqrt{13}\pi$

20) (ITA-93) Dadas as retas $(r_1)$: $x + 2y - 5 = 0$, $(r_2)$: $x - y - 2 = 0$ e $(r_3)$: $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:
a) são 2 a 2 paralelas
b) $(r_1)$ e $(r_3)$ são paralelas
c) $(r_1)$ é perpendicular a $(r_3)$
d) $(r_2)$ é perpendicular a $(r_3)$
e) as três são concorrentes

21) (ITA-93) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta (s) simétrica a (r) em relação ao eixo das abscissas é descrita por:
a) $x + 2y = 0$ c) $2x + 3y + 1 = 0$ e) $x - 2y - 2 = 0$
b) $3x - y + 3 = 0$ d) $x + 2y + 2 = 0$

22) (ITA-93) Uma das circunferências que passa pelo ponto P(0, 0) e tangencia as retas ($r_1$): $x - y = 0$ e ($r_2$): $x + y - 2 = 0$ tem sua equação dada por:
a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
d) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$
e) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

23) (ITA-93) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 $m^2$ vale:
a) 128 $m^2$ b) $64\sqrt{2}$ $m^2$ c) 135 $m^2$
d) $60\sqrt{2}$ $m^2$ e) $32(\sqrt{2} + 1)$ $m^2$

24) (ITA-93) São dados dois cubos I e II de áreas totais $S_1$ e $S_2$ e de diagonais $d_1$ e $d_2$, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ $m^2$ e que $d_2 = 3$ m, então o valor da razão $d_1/d_2$ é:
a) 3/2 b) 5/2 c) 2 d) 7/3 e) 3

25) (ITA-93) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e $15\pi$ $dm^2$ de área lateral, o valor de seu volume em $dm^3$ é:
a) $9\pi$ b) $15\pi$ c) $36\pi$ d) $20\pi$ e) $12\pi$

# ITA 1993/1994

1) (ITA-94) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x + iy)^2 = (x + y)i$, então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x > 0$ e $y < 0$.
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) $x < 0$ e $y = z$.
e) $x^2 + xy + y^2 = 1/2$

2) (ITA-94) Considere as afirmações:
I- $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{10} = \cos(10\theta) + \operatorname{sen}(10\theta)$, para todo $\theta \in R$.
II- $(5i)/(2 + i) = 1 + 2i$
III- $(1 - i)^4 = -4$
IV- Se $z^2 = (\bar{z})^2$ então z é real ou imaginário puro.
V- O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.
Podemos concluir:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.

e) Apenas uma é verdadeira.

3) (ITA-94) Dadas as funções reais de variável real f(x) = mx + 1 e g(x) = x + m, onde m é uma constante real com 0 < m < 1, considere as afirmações:
I- (fog)(x) = (gof)(x), para algum $x \in R$.
II- f(m) = g(m)
III- Existe $a \in R$ tal que (fog)(a) = f(a).
IV- Existe $b \in R$ tal que (fog)(b) = mb.
V- 0 < (gog)(m) < 3
Podemos concluir
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

4) (ITA-94) A identidade: $\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo real $x \neq -1$. Então a + b + c é igual a:
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

5) (ITA-94) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:
a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) 194

6) (ITA-94) Seja P(x) um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e i como raízes. Se P(1)P(– 1) < 0, então o número de raízes reais de P(x) pertencentes ao intervalo ] – 1, 1[ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7) (ITA-94) Quantas anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?
a) 7200 b) 7000 c) 4800
d) 3600 e) 2400

8) (ITA-94) No desenvolvimento de $A = (\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3})^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a 9/16. Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2+4)^5$ então:
a) a .m = 2/3 b) a .m = 1/3 c) a + m = 5/2
d) a + m = 5 e) a – m = 5/2

9) (ITA-94) Seja ($a_1$, $a_2$, .... , $a_n$) uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão q > 0. O produto de seus termos é igual a $2^{25}$ e o termo do meio é $2^5$. Se a soma dos (n - 1) primeiros termos é igual a $2(1 + q)(1 + q^2)$, então:
a) $a_1 + q = 16$ b) $a_1 + q = 12$ c) $a_1 + q = 10$
d) $a_1 + q + n = 20$ e) $a_1 + q + n = 11$

10) (ITA-94) Sejam A e I matrizes reais quadradas de ordem 2, sendo I a matriz identidade. Por T denotamos o traço de A, ou seja T é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Se $T \neq 0$ e $\lambda_1$, $\lambda_2$ são raízes da equação: $\det(A - \lambda I) = \det(A) - \det(\lambda I)$, então:
a) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ independem de T. b) $\lambda_1 . \lambda_2 = T$ c) $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$
d) $\lambda_1 + \lambda_2 = T/2$ e) $\lambda_1 + \lambda_2 = T$

11) (ITA-94) Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica(isto é, $A = A^t$) e P é ortogonal(isto é, $PP^t = I = P^tP$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$ então:
a) AB é simétrica. b) BA é simétrica. c) det A = det B
d) BA = AB e) B é ortogonal.

12) (ITA-94) Seja a uma matriz real quadrada de ordem n e B = I – A, onde I denota a matriz identidade de ordem n. supondo que A é inversível e idempotente(isto é, $A^2 = A$) considere as afirmações:
I- B é idempotente.
II- AB = BA
III- B é inversível.
IV- $A^2 + B^2 = I$
V- AB é simétrica.
Com respeito a estas afirmações temos:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas uma é verdadeira.
c) Apenas duas são verdadeiras.
d) Apenas três são verdadeiras.
e) Apenas quatro são verdadeiras.

13) (ITA-94) Sejam x e y números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema:

$$\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{y^2} \\ \log x + \log y = \log \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

. Então o conjunto (x, y) está contido no intervalo:
a) [2, 5] b) ]0, 4[ c) [-1, 2]
d) [4, 8[ e) $[5, \infty[$

14) (ITA-94) A expressão trigonométrica

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}$$

Para $x \in ]0, x/2[$ , $x \neq \pi/4$, é igual a:
a) sen(2x) b) cos(2x) c) 1 d) 0 e) sec(2x)

15) (ITA-94) Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que a, b, c, neta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{77}{240}$$

Então sua área, em $cm^2$, mede:
a) $(15\sqrt{7})/4$ b) $(4\sqrt{5})/3$ c) $(4\sqrt{5})/5$
d) $(4\sqrt{7})/7$ e) $(3\sqrt{5})/4$

16) (ITA-94) Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Se a soma de seus termos é igual a (13a + 12) e x é um número real positivo diferente de 1 tal que:

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}+\frac{1}{\log_c x}+\frac{1}{\log_d x}+\frac{1}{\log_e x}=\frac{5}{2}$$

então x é igual a:
a) $3^3$ b) $2^3$ c) $(5/2)^2$ d) $(5/2)^{3/2}$ e) $(2/5)^2$

17) (ITA-94) O sistema indicado abaixo, nas incógnitas x, y e z,
$3^a x - 9^a y + 3z = 2^a$
$3^{a+1}x - 5y + 9z = 2^{a+1}$
$x + 3^{a-1}y + 3^{a+1}z = 1$
É possível e determinado quando o número a é diferente de:
a) $\log_3 2$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 5)$. b) $\log_2 3$ e $\frac{1}{2}(\log_2 5)$.
c) $\log_2 1$ e $\frac{1}{2}(\log_2 3)$. d) $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 1)$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 3)$.
e) $\log_3 1$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_3 5)$.

18) (ITA-94) Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que $A\hat{B}C = 70^o$. Se $x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$, então:
a) $x = 120^o$ b) $x = 110^o$ c) $x = 100^o$
d) $x = 90^o$ e) $x = 80^o$

19) (ITA-94) Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se $x = A\hat{B}C$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:
a) $S = r^2\cos(2x)$ b) $S = r^2\text{sen}(2x)$
c) $S = \frac{1}{2}r^2\text{sen}(2x)$ d) $S = \frac{1}{2}r^2\cos^2 x$
e) $S = \frac{1}{2}r^2\text{sen}^2 x$

20) (ITA-94) Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações $3x - 4y = 3$ e $2x + y = 2$. Um ponto P pertencente à reta s tem abcissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a r, então a + b + c é igual a :
a) –132 b) –126c) –118 d) –114 e) -112

21) (ITA-94) Um triângulo equilátero é tal que A: (0, 3), B: $(3\sqrt{3}, 0)$ e a abcissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio r e centro em O: (a, b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:
a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

22) (ITA-94) Um prisma regular tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:
a) $(6\sqrt{2})/\pi$ b) $(9\sqrt{2})/\pi$ c) $(3\sqrt{6})/\pi$
d) $(6\sqrt{3})/\pi$ e) $(9\sqrt{3})/\pi$

23) (ITA-94) Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm$^2$. Então sua altura, em cm, é igual a:
a) 2 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

24) (ITA-94) Num cilindro circular reto sabe-se que a altura h e o raio da base r são tais que os números $\pi$, h, r formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma $6\pi$. O valor da área total deste cilindro é:
a) $\pi^3$ b) $2\pi^3$ c) $15\pi^3$ d) $20\pi^3$ e) $30\pi^3$

25) (ITA-94) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, então o valor de sua altura h, em cm, é tal que:
a) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$ b) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$ c) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$
d) $1 < h < \sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

## ITA 1994/1995

1) (ITA-95) Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \text{sen}\frac{n!.\pi}{6}; n \in N \right\}$
Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com A dá o próprio A?
a) $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $[-2, 2]$
d) $[-2, 0]$ e) $[0, 2]$

2) (ITA-95) Seja a função f: $\Re \to \Re$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} a(x + \pi/2) & \text{se}, x < \pi/2 \\ (\pi/2) - (a/x)\text{sen}x & \text{se}, x \geq \pi/2 \end{cases}$$
onde a > 0 é uma constante. Considere K = {$y \in R$; $f(y)=0$}. Qual o valor de a, sabendo-se que $f(\pi/2) \in K$?
a) $\pi/4$ b) $\pi/2$ c) $\pi$ d) $\pi^2/2$e) $\pi^2$

3) (ITA-95) Uma vez, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x-1)$. Temos como conseqüência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se:
a) $x^{n-1} < [n(1+x)]^{-1}$ b) $x^{n-1} < [(n+1)(1+x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1-x)]^{-1}$ d) $x^{n-1} < [(n+1)(1-x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1-x)]^{-1}$

4) (ITA-95) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:

a) $5.10^6$ e $6.10^6$. b) $6.10^6$ e $7.10^6$. c) $7.10^6$ e $8.10^6$.
d) $9.10^6$ e $10.10^6$. e) $10.10^6$ e $11.10^6$.

5) (ITA-95) Para cada $n \in N$, temos que:
$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \dots - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:
a) $(-1)^n 2^{2n}$. b) $2^{2n}$. c) $(-1)^n 2^n$.
d) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$. e) $(-1)^{n+1} 2^n$.

6) (ITA-95) Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0,003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:
a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 2 e) 1/2

7) (ITA-95) Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundo é:

| Tempo(s) | Concentração(moles) |
|---|---|
| 1 | 3,00 |
| 2 | 5,00 |
| 3 | 1,00 |

a) 3,60 b) 3,65 c) 3,70 d) 3,75 e) 3,80

8) (ITA-95) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

9) (ITA-95) Sabendo que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:
a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

10) (ITA-95) Seja z um número complexo satisfazendo $Re(z) > 0$ e $(\bar{z} + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se n é o menor natural para o qual $z^n$ é um número imaginário puro, então n é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11) (ITA-95) Sejam $z_1$ e $z_2$ números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:
a) $-1$ b) $-1 + 2^{1/2}$ c) $1 - 2^{1/3}$
d) $1 + 3^{1/2}$ e) $-1 + 3^{1/2}$

12) (ITA-95) Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (\log_3 a)^2 . y + z = 0 \\ 2x + 2y + (\log_3 \frac{27}{a})z = 0 \end{cases}$$
em que há indeterminação, então:
a) $S \subset [-3, 3]$. b) S é vazio. c) $S \subset [2, 4]$.
d) $S \subset [1, 3]$. e) $S \subset [0, 1]$.

13) (ITA-95) Se x é um número real positivo com $x \neq 1$ e $x \neq 1/3$, satisfazendo $\frac{2+\log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x(x+2)$ então x pertence ao intervalo I, onde:
a) I = (0, 1/9) b) I = (0, 1/3) c) I = (1/2, 1)
d) I = (1, 3/2) e) I = (3/2, 2)

14) (ITA-95) Dizemos que duas matrizes **nxn** A e B são semelhantes se existe uma matriz **nxn** inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então:
a) B é sempre inversível.
b) Se A é simétrica, então B também é simétrica.
c) $B^2$ é semelhante a A.
d) Se C é semelhante a A, então BC é semelhante a $A^2$.
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde $\lambda$ é um real qualquer.

15) (ITA-95) Sejam A e B matrizes reais 3x3. Se tr(A) denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:
I- $tr(A^t) = tr(A)$
II- Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
III- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in R$.
Temos que:
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Todas as afirmações são falsas.
c) Apenas a afirmação I é verdadeira.
d) Apenas a afirmação II é falsa.
e) Apenas a afirmação III é falsa.

16) (ITA-95) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) (– b, – b) b) (– 2b, – b) c) (4b, – 2b)
d) (3b, – 2b) e) (– 2b, – 2b)

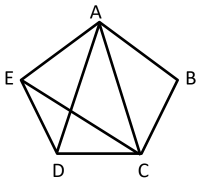
17) (ITA-95) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que c > 0 e c = – 2d, então a/b é igual a :
a) – 4/15 b) – 5/16 c) – 3/16 d) – 6/15 e) – 7/15

18) (ITA-95) Considere C uma circunferência centrada em O e raio 2r, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio OABT é igual a:
a) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$ b) $2r^2(4\cos\theta - \text{sen } 2\theta)$
c) $r^2(4\,\text{sen }\theta - \text{sen } 2\theta)$ d) $r^2(2\,\text{sen }\theta + \cos\theta)$
e) $2r^2(2\,\text{sen } 2\theta - \cos 2\theta)$

19) (ITA-95) A expressão $\frac{\text{sen }\theta}{1+\cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, idêntica a:
a) $\sec\theta/2$ b) $\text{cosec}\,\theta/2$ c) $\text{cotg}\,\theta/2$ d) $\text{tg}\,\theta/2$ e) $\cos\theta/2$

20) (ITA-95) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura H. Se o segundo, disparado sob um ângulo $2\theta$, a atinge a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:
a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$ b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$ d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$
e) $H = hd^2/(d^2 + h^2)$

21) (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:
a) $x^2 + x - 2 = 0$.
b) $x^2 - x - 2 = 0$ .
c) $x^2 - 2x + 1 = 0$.
d) $x^2 + x - 1 = 0$.
e) $x^2 - x - 1 = 0$.




22)(ITA-95) Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:
a) 10/3 b) 4/4 c) 12/5 d) 3 e) 2

23) (ITA-95) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em $m^2$, vale:
a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{9\pi(\pi+2)}{4}$ c) $\pi(\pi+2)$
d) $\frac{\pi^2}{2}$ e) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

24) (ITA-95) Dado o prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em $cm^3$, é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) 12 d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$

25) (ITA-95) Dada uma pirâmide triangular, sabe-se que sua altura mede 3a cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em $cm^2$, vale:
a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$

## ITA 1995/1996

1) (ITA-96) Seja $a \in \Re$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$A = \begin{bmatrix} \log_a^{3a} & \log_{10}^{(3a)^2} \\ \log_a^{1/a} & \log_a^{a} \\ \log_a^{1} & \log_{10}^{1} \end{bmatrix}$ Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:

a) $a \neq 10$ e $a \neq 1/3$
b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq 1/3$
c) $a \neq 2$ e $a \neq 10$
d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$
e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

2) (ITA-96) Sejam A e B subconjuntos não vazios de R, e considere as seguintes afirmações:

I- $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \varnothing$
II- $(A - B^C)^C = B - A^C$
III- $[(A^C - B)\cap(B - A)]^C = A$

Sobre essas afirmações podemos garantir que:

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas a afirmação III é verdadeira.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

3) (ITA-96) Numa pirâmide regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão H/R é igual a:

a) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$
b) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$
c) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$
d) $1+\sqrt{3\sqrt{3}-1}$
e) $\sqrt{3}+1$

4) (ITA-96) Dadas as afirmações:

I- $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.......+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n, n \in N$

II- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. n \in N, k = 1,2,3.....,n$

III- Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50. Conclui-se que:

a) Todas são verdadeiras
b) Apenas a afirmação I e II são verdadeiras.
c) Apenas I é verdadeira.
d) Apenas II é verdadeira.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

5) (ITA-96) Considere o polinômio:

$P(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 + 8z^2 + 16z$

a) Apenas uma é real.
b) Apenas duas raízes são reais e distintas.
c) Apenas duas raízes são reais e iguais.
d) Quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.
e) Quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

6) (ITA-96) Seja $a \in R\ [-\pi/4, \pi/4]$ um número real dado. A solução $(x_0, y_0)$ do sistema de equações:

$$\begin{cases}(\operatorname{sen} a)y - (\cos a)x = -\operatorname{tg} a \\ (\cos a)y + (\operatorname{sen} a)x = -1\end{cases}$$ é tal que:

a) $x_0 . y_0 = \operatorname{tg} a$ b) $x_0 . y_0 = - \sec a$ c) $x_0 . y_0 = 0$
d) $x_0 . y_0 = \operatorname{sen}^2 a$ e) $x_0 . y_0 = \operatorname{sen} a$

7) (ITA-96) Seja $f: \Re_+^* \to \Re$ uma função injetora tal que f(1) = 0 e f(x.y) = f(x) + f(y) pra todo x > 0 e y > 0. Se $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ e $x_5$ formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde $x_i > 0$ para i = 1, 2, 3, 4, 5 e sabendo que $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1)$ e $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = -2f(2x_1)$, então o valor de $x_1$ é:

a) -2 b) 2 c) 3 d) 4 e) 1

8) (ITA-96) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$ b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$
d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$ e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

9) (ITA-96) Tangenciando externamente a elipse $\varepsilon_1$, tal que $\varepsilon_1$: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse $\varepsilon_2$, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de $\varepsilon_1$ e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de $\varepsilon_1$. Sabendo que $\varepsilon_2$ está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de $\varepsilon_2$ é:

a) (7,3) b) (8,2) c) (8,3) d) (9,3) e) ( 9,2)

10) (ITA-96) São dadas as parábolas $p_1$: $y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2$: $y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por $V_1$ e $V_2$. Sabendo que r é a reta que contém $V_1$ e $V_2$, então a distância de r até à origem é:

a) $5/\sqrt{26}$ b) $7/\sqrt{26}$ c) $7/\sqrt{50}$
d) $17/\sqrt{50}$ e) $11/\sqrt{74}$

11) (ITA-96) Seja $a \in \Re$, a > 1. Para que:
$]4, 5[ = \{x \in \Re_+^* ;\ \log_{1/a}[\log_a(x^2 - 15)] > 0\}$. O valor de a é:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 9 e) 10

12) (ITA-96) Se $(x_0, y_0)$ é uma solução real do sistema

$$\begin{cases}\log_2(X+Y) - \log_3(X-2Y) = 2 \\ X^2 - 4Y^2 = 4\end{cases}$$ então $x_0 +\ y_0$ é igual a:

a) $7/4$ b) $9/4$ c) $11/4$ d) $13/4$ e) $17/4$

13) (ITA-96) Considere A e B matrizes reais 2x2, arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

a) Se A é não nula então A possui inversa
b) $(AB)^t = A^tB^t$
c) det (AB) = det (BA)
d) det $A^2$ = 2 det A
e) $(A + B)(A – B) = A^2 – B^2$

14) (ITA-96) Seja $a \in \Re$ e considere as matrizes reais 2x2.

$A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$

O produto AB será inversível se e somente se:
a) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$ b) $a^2 - 5a \neq 0$ c) $a^2 - 3a \neq 0$
d) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$ e) $a^2 - 2a \neq 0$

15) (ITA-96) Seja $\alpha$ um número real tal que $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes dessa equação são cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:
a) 30º b) 45º c) 60º d) 135º e) 120º

16) (ITA-96) Seja $\alpha \in [0, \pi/2]$, tal que:
(sen x + cos x) = m.
Então, o valor de $y = \dfrac{\text{sen}\, 2\alpha}{\text{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}$ será:

a) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$ b) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$ c) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$ e) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

17) (ITA-96) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são centros das faces do cubo será:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$x cm b) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$x cm c) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$x cm

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$x cm e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$x cm

18) (ITA-96) As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm$^2$, então o volume deste paralelepípedo, em cm$^3$, é igual a:
a) 1200 b) 936 c) 1155 d) 728 e) 834

19) (ITA-96) Três pessoas A, B e C, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ e $H_5$. Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?
I- Existe um total de 120 combinações
II- Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente
III- Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel
a) Todas as afirmações são verdadeiras.

b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

20) (ITA-96) O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{2})^{93}i$ e) $(\sqrt{2})^{93}+i$

21) (ITA-96) Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica.
Então, o sistema em x e y $\begin{cases} a_1x + a_3x = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4x = a_2 \end{cases}$ é um sistema:

a) Impossível.
b) Possível e determinado.
c) Possível e indeterminado.
d) Possível determinado para $a_1 > 1$.
e) Possível determinado para $a_1 < -1$.

22) (ITA-96) Considere as funções reais f e g definidas por:
$f(x) = \frac{1+2x}{1-x^2}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ e $g(x) = \frac{x}{1+2x}$, $x \in R - \{-1/2\}$. O maior subconjunto de R onde pode ser definida a composta fog, tal que (fog)(x) < 0, é:
a) ]-1, -1/2[ $\cup$ ]-1/3, -1/4[ b) ]-$\infty$, -1[ $\cup$ ]-1/3, -1/4[
c) ]-$\infty$, -1[ $\cup$ ]-1/2, 1[ d) ]1, $\infty$[
e) ]-1/2, -1/3[

23) (ITA-96) Seja $f: R \to R$ definida por:
$f(x) = \begin{cases} 3x+3, x \leq 0 \\ x^2+4x+3, x > 0 \end{cases}$

a) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(21)$.
b) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(99)$.
c) f é sobrejetora mas não é injetora.
d) f é injetora mas não é sobrejetora.
e) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(3)$.

24) (ITA-96) Sabendo que o ponto (2,1) é ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
a) y = 2x – 3 b) y = x – 1 c) y = – x + 3
d) y = 3x/2 – 2 e) y = – x/2 + 2

25) (ITA-96) São dadas as retas r: $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e s: $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ e a circunferência C: $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:
a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.
b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a C.

c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.
d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.
e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

## ITA 1996/1997

1) (ITA-97) Se **Q** e **I** representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções $f.\Re \to \Re$ definidas por

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in Q \\ 1, \text{ se } x \in I \end{cases}$ $\quad$ $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ 0, \text{ se } x \in I \end{cases}$

Seja J a imagem da função composta $f$og : $\Re \to \Re$. Podemos afirmar que:
a) J = $\Re$ b) J = Q c) J = {0}
d) J = {1} e) J = {0,1}

2) (ITA-97) Seja n $\in$N com n > 1 fixado. Considere o conjunto:
$A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in Z. \text{ sendo, } 0 < q < n \right\}$. Definimos *f*: $\Re \to \Re$ por $f(x) = [\cos(n!\,\pi x)]^{2n}$. Se *f*(A) denota a imagem do conjunto A pela função f, então
a) *f*(A) = ]-1, 1[ b) *f*(A) = [0, 1] c) *f*(A) = {1}
d) *f*(A) = {0} e) *f*(A) = {0, 1}

3) (ITA-97) O domínio D da função

$f(x) = \ln \left[ \dfrac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} \right]$ é o conjunto

a) D = { x $\in \Re$: 0 < x < $3\pi / 2$}
b) D = { x $\in \Re$: x < $1/\pi$ ou x > $\pi$}
c) D = { x $\in \Re$: 0 < x $\leq 1/\pi$ ou x $\geq \pi$ }
d) D = { x $\in \Re$: x > 0}
e) D = { x $\in \Re$: 0 < x < $1/\pi$ ou $\pi$ < x < $3\pi/2$ }

4) (ITA-97) Considere os números complexos
z = $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e w = 1 + i$\sqrt{3}$.

m = $\left| \dfrac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i} \right|^2$, então **m** vale

a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

5) (ITA-97) Seja m $\in \Re_+^*$, tal que a reta x – 3y – m = 0 determina, na circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de m é:
a) 10 + 4$\sqrt{10}$ b) 2 + $\sqrt{3}$ c) 5 – $\sqrt{2}$
d) 6 + $\sqrt{10}$ e) 3

6) (ITA-97) Sejam m $\in$ N e n $\in \Re_+^*$ com m $\geq$ 10 e x $\in \Re_+^*$. Seja D o desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de b. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$

, o sexto termo de D fica independente de x. Quando $a = x$ e $b = x^{-1/n}$, o oitavo termo de D se torna independente de x. Então m é igual a
a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

7) (ITA-97) Seja a, b, c $\in \Re_+^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$. Se x, y e z satisfazem o sistema
$\begin{cases} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{cases}$, então cos x + cos y + cos z é igual a:
a) (a - b)/c b) (a + b)/c c) (b + c)/a
d) (c + a)/b e) $(b^2 + c^2)/a$

08) (ITA-97) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e não nulas. Por O denotamos a matriz nula de ordem n. Se AB = AC considere as afirmações:
I- $A^2 \neq 0$
II- B = C
III- det B $\neq$ 0
IV- det(B – C) = 0
Então:
a) Todas são falsas.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

9) (ITA-97) Seja $\theta$ um valor fixado no intervalo ]0, $\pi$/2[. Sabe-se que $a_1$ = cotg $\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão q = $\text{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:
a) cosec $\theta$. tg $\theta$ b) sec $\theta$. tg $\theta$ c) sec $\theta$. cosec $\theta$
d) $\sec^2\theta$ e) $\text{cosec}^2\theta$

10) (ITA-97) Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente pelas equações x + y = 3 e x – y = – 3. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com B $\in$ r e C $\in$ s. Sabendo que d(A,B) = d(A,C) = $\sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
a) 2x + 3y = 1 b) y = 1 c) y = 2
d) x = 1 e) x = 2

11) (ITA-97) Sejam f ,g : $\Re \to \Re$ funções tais que:
g(x) = 1 – x e $f$ (x) + 2$f$ (2 – x ) = $(x – 1)^3$
para todo x $\in \Re$. Então $f$ [g(x)] é igual a:
a) $(x – 1)^3$ b) $(1 – x)^3$ c) $x^3$ d) x e) 2 – x

12) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 – 4x^5 + 4x – 2 = 0$. Sobre os
elementos de S podemos afirmar que:
a) Todos são números reais.
b) 4 são números reais positivos.

c) 4 não são números reais.
d) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.
e) 3 são números reais negativos.

13) (ITA-97) Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus $n_1$, $n_2$ e $n_3$, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:
I - $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$.
II - $p_1(x) - ½\, p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.
III - $p_1(x)\, r(x)$ é divisível por $\{p_3(x)\}^2$.
Então,
a) Apenas I e II são verdadeiras
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas I e III são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras
e) Todas as afirmações são falsas

14) (ITA-97) Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em $cm^2$) igual a:
a) $2\ sen^2\alpha.cotg\ \beta + sen\ 2\alpha$ b) $2\ sen^2\alpha.tg\ \beta - sen\ 2\alpha$
c) $2\cos^2\alpha.cotg\ \beta + sen\ 2\alpha$ d) $2\cos^2\alpha.tg\ \beta + sen\ 2\alpha$
e) $2\ sen^2\alpha.tg\ \beta - \cos 2\alpha$

15) (ITA-97) Considere no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente $z_1, z_2, \ldots z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a:
a) $2 + 4i$ b) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)i$
c) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$ d) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)i$
e) $\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2)i$

16) (ITA-97) Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente, às equações:
$$|z - 3i| = 3 \text{ e } |z + i| = |z - 2 - i|$$
O produto de todos os elementos de S é igual a:
a) $-2 + i\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$
d) $-3 + 3i$ e) $-2 + 2i$

17) (ITA-97) Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$ as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então:
a) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ b) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ d) $x_1 . x_2 . x_3 = 8$
e) $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = 5$

18) (ITA-97) Os números reais x, y e z formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r. Seja $\alpha$ um número real com $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ satisfazendo

$3a^x + 2a^y - a^z = 0$ . Então r é igual a
a) $a^2$  b) $(½)^a$  c) $\log_{2a}4$  d) $\log_a (3/2)$  e) $\log_a 3$

19) (ITA-97) A seqüência ($a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$) é uma progressão geométrica de razão $q \in \Re^*$ com $q \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Com relação ao sistema:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c \\ a_3x + a_4y = d \end{cases}$$ , podemos afirmar que:

a) É impossível para c, d $\in$ [ – 1, 1]
b) É possível e determinado somente se c = d.
c) É indeterminado quaisquer que sejam c, d $\in \Re$.
d) É impossível  quaisquer que sejam c, d $\in \Re^*$.
e) É indeterminado somente se $d = cq^2$.

20) (ITA-97) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sejam $\lambda_0$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ as raízes da equação det $(A - \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Considere as afirmações:
I- $B = A - \lambda_0 I_3$
II- $B = (A - \lambda_1 I_3)A$
III- $B = A(A - \lambda_2 I_3)$
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Todas as afirmações são verdadeiras.
c) Apenas I é falsa.
d) Apenas II é falsa.
e) Apenas III é verdadeira.

21) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\sec\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{1+e^x} - \operatorname{arctg}(1-e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Então:
a) $S = \varnothing$  b) S = R  c) $S \subset [1, 2]$
d) $S \subset [-1, 1]$ e) S = [-1, 2[

22) (ITA-97) Dado um número real a com a > 1, seja S o conjunto solução da inequação

$$\log_{1/a}\log_a\left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \leq \log_{1/a}(x-1)$$

Então S é o intervalo:
a) [4, +$\infty$[  b) [4, 7[  c) ]1, 5]
d) ]1, 4]  e) [1, 4[

23) (ITA-97) Considere os pontos A: (0, 0) e B: (2, 0) e C: (0, 3). Seja P: (x, y) o ponto da intersecção das bissetrizes internas do triângulos ABC. Então x + y é igual a:
a) $12/(5 + \sqrt{13})$  b) $8/(2 + \sqrt{11})$c) $10/(6 + \sqrt{13})$

d) 5 e) 2

24) (ITA-97) A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a:

a) $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$ e) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

25) (ITA-97) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e 2a cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede:

a) $a\sqrt{3}/\sqrt{5}$ b) $a\sqrt{35}/10$ c) $a\sqrt{3}/2\sqrt{5}$

d) $a\sqrt{35}/\sqrt{10}$ e) $a\sqrt{7}/\sqrt{5}$

# ITA 1997/1998

**Principais notações**

$[a , b] = \{x \in \Re: a \leq x \leq b\}$

$[a , b[ = \{x \in \Re: a \leq x < b\}$

$]a , b] = \{x \in \Re: a < x \leq b\}$

$]a , b[ = \{x \in \Re: a < x < b\}$

(a , b) - par ordenado

$A^t$ - matriz transposta da matriz A

$]-\infty , b] = \{x \in \Re: x \leq b\}$

$]-\infty , b[ = \{x \in \Re: x < b\}$

$[a , +\infty[ = \{x \in \Re: a \leq x\}$

$]a , +\infty[ = \{x \in \Re: a < x\}$

I - matriz identidade de ordem 2

$A^{-1}$ - matriz inversa da matriz A

1) (ITA-98) Seja f: $\Re \to \Re$ a função definida por:

$$f(x) = 2\text{sen } 2x - \cos 2x$$

Então:

a) f é impar e periódica de período $\pi$.

b) f é par e periódica de período $\pi/2$.

c) f não é par nem ímpar e é periódica de período $\pi$.

d) f não é par e é periódica de período $\pi/4$.

e) f não é ímpar e não é periódica.

2) (ITA-98) O valor de:
$tg^{10}x - 5tg^8x\ sec^2x + 10tg^6x\ sec^4x - 10tg^4x\ sec^6x + 5tg^2x\ sec^8x - sec^{10}x$ , para todo $x \in [0 , \pi/2[$, é:

a) 1 b) $\frac{-\sec^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ c) $-\sec x + tg\ x$ d) $-1$ e) zero

3) (ITA-98) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz M inversível tal que: $A = M^{-1}BM$.
Então:
a) $\det(-A^t) = \det B$
b) $\det A = -\det B$
c) $\det(2A) = 2\det B$
d) Se $\det B \neq 0$ então $\det(-AB) < 0$
e) $\det(A - I) = -\det(I - B)$

4) (ITA-98) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) $\pi$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) $2\pi$

5) (ITA-98) Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o números complexo $z = x + iy$ é tal que $z^3$ e $|z|$, valem respectivamente:
a) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$ b) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$ c) $i$ e 1
d) $-i$ e 1 e) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

6) (ITA-98) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:
a) 23º b) 32º c) 36º d) 40º e) 45º

7) (ITA-98) Seja $(a_1 , a_2 , a_3 ,...)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1$, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$ . A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{20}{27}$ c) $\frac{26}{27}$ d) $\frac{30}{27}$ e) $\frac{38}{27}$

8) (ITA-98) O valor de $y \in \Re$ que satisfaz a igualdade:

$$\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7 ,$$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $\frac{1}{8}$ e) 7

9) (ITA-98) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:
a) 12! b) (8!)(5!) c) 12! – (8!)(5!)
d) 12! – 8! e) 12! – (7!)(5!)

10) (ITA-98) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45º . Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Nota:** resolva as questões numeradas de 11 a 25 no caderno de respostas. Na folha de leitura óptica assinale as alternativas das 25 questões. Ao terminar a prova, entregue ao fiscal o caderno de respostas e a folha de leitura óptica.

11) (ITA-98) Seja f: $\Re \to \Re$ a função definida por: $f(x) = -3a^x$ , onde **a** é um número real, 0 < a < 1. Sobre as afirmações:
(I) $f(x + y) = f(x).f(y)$, para todo x, y $\in \Re$.
(II) f é bijetora.
(III) f é crescente e $f(\,]0, +\infty[\,) = ]-3, 0[$.
Podemos concluir que:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Todas as afirmações são verdadeiras.
c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

12) (ITA-98) Sejam as funções f: $\Re \to \Re$ e g:$A \subset \Re \to \Re$, tais que
$f(x) = x^2 - 9$ e $(fog)(x) = x - 6$,
em seus respectivos domínios. Então, o domínio **A** da função **g** é:
a) $[-3, +\infty[$ b) $\Re$ c) $[-5, +\infty[$
d) $]-\infty, -1[ \cup [3, +\infty[$ e) $]-\infty, \sqrt{6}[$

13) (ITA-98) Considere a, b $\in \Re$ e a equação:
$$2e^{3x} + a.e^{2x} + 7e^x + b = 0.$$
Sabendo que as três raízes reais $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então **a – b** vale:
a) 5 b) – 7 c) – 9 d) – 5 e) 9

14) (ITA-98) Seja **a** um número real tal que o polinômio
$p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$
admite apenas raízes reais. Então:
a) $a \in [2, \infty[$ b) $a \in [-1, 1]$ c) $a \in ]-\infty, -7]$
d) $a \in [-2, -1[$ e) $a \in ]1, 2[$

15) (ITA-98) Seja p(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de p(x) por x – 2 obtém-se um quociente q(x) e resto igual a 26. Na divisão de p(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente h(x) e resto 8x – 5. Sabe-se que q(0) = 13 e q(1) = 26. Então, h(2) + h(3) é igual a:
a) 16 b) zero c) – 47 d) – 28 e) 1

16) (ITA-98) Sejam a, b $\in \Re$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-by+3z=0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b}=11$ b) $\frac{b}{a}=22$ c) $ab = \frac{1}{4}$

d) $ab = 22$ e) $ab = 0$

17) (ITA-98) Sejam as matrizes de ordem 2,

$$A=\begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$$

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

a) $a + 1$ b) $4(a + 1)$ c) $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$

d) $\frac{1}{4}(1 + 2a + a^2)$ e) $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$

18) (ITA-98) A inequação:

$4x \log_5(x + 3) \geq (x^2 + 3) \log_{\frac{1}{5}}(x + 3)$

é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

a) $S = ]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$

b) $S = ]-\infty, -3[ \cup [-1, +\infty[$

c) $S = ]-3, -1]$

d) $S = ]-2, +\infty]$

e) $S = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, +\infty[$

19) (ITA-98) A soma das raízes da equação

$$\sqrt{3}\,\text{tg}x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x = 0$$

que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $\frac{17\pi}{4}$ b) $\frac{16\pi}{3}$ c) $\frac{15\pi}{4}$ d) $\frac{14\pi}{3}$ e) $\frac{13\pi}{4}$

20) (ITA-98) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

(I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

(II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

(III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.

b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

c) Apenas (I) é verdadeira.

d) Apenas (III) é verdadeira.

e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

21) (ITA-98) As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em $cm^2$, vale:

a) $\frac{36}{5}$ b) $\frac{27}{4}$ c) $\frac{44}{3}$ d) $\frac{48}{3}$ e) $\frac{48}{5}$

22) (ITA-98) Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido , dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo **m** e **n**, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:
a) m = 9, n = 7 b) m = n = 9 c) m = 8, n = 10
d) m = 10 , n = 8 e) m = 7 , n = 9

23) (ITA-98) Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se **n** planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando **n + 1** cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a $2\pi$. então, o volume, em $cm^3$, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:
a) $\frac{\pi}{33}$ b) $\frac{2\pi}{33}$ c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{2\pi}{15}$ e) $\pi$

24) (ITA-98) Considere a hipérbole **H** e a parábola **T**, cujas equações são, respectivamente,
$5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = - 20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$.
Então, o lugar geométrico dos pontos **P**, cuja soma dos quadrados das distâncias de **P** a cada um dos focos da hipérbole **H** é igual ao triplo do quadrado da distância de **P** ao vértice da parábola **T**, é:
a) a elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.
b) a hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} + \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.
c) O par de retas dadas por $y = \pm (3x - 1)$.
d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.
e) A circunferência centrada em (9 , 5) e raio $\sqrt{120}$ .

25) Considere o paralelogramo ABCD onde A = (0 , 0), B = ( – 1 , 2) e C = ( – 3 , -4). Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:
a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = ( – 2 , – 5) b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = ( – 1 , – 5)
c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = ( – 2 , – 6) d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = ( – 2 , – 6)
e) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = ( – 2 , – 5)

# ITA 1998/1999

**Principais notações**
***Z*** - o conjunto de todos os números inteiros.
***R*** - o conjunto de todos os números reais.
***C*** - o conjunto de todos os números complexos.

$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x \leq b\}$ $]-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R}: x \leq b\}$
$[a, b[ = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x < b\}$ $]-\infty, b[ = \{x \in \boldsymbol{R}: x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x \leq b\}$ $[a, +\infty[ = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leq x\}$
$]a, b[ = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x < b\}$ $]a, +\infty[ = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x\}$
(a, b) - par ordenado
g o *f* - função composta de *g* e *f*
$A^{-1}$ = matriz inversa da matriz A
$A^t$ - matriz transposta da matriz A

**Questões**

1) (ITA-99) Sejam *E, F, G* e *H* subconjuntos não vazios de ***R***. Considere as afirmações:
I - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
II - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.
III - Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.
Então:
a) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

2) (ITA-99) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62417 ocupa o *n*-ésimo lugar. Então *n* é igual a:
a) 74 b) 75 c) 79
d) 81 e) 92

3) (ITA-99) Sejam *f, g:* $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funções definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Considere as afirmações:
I - Os gráficos de *f* e *g* não se interceptam.
II- As funções *f* e *g* são crescentes.
III- $f(-2)\,g(-1) = f(-1)\,g(-2)$.
Então:
a) Apenas a afirmação (I) é falsa.
b) Apenas a afirmação (III) é falsa.
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
d) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
e) Todas as afirmações são falsas.

4) (ITA-99) Seja $a \in \boldsymbol{R}$ com $a > 1$. O conjunto de todas as soluções reais da inequação $\mathbf{a^{2x(1-x)} > a^{x-1}}$, é:
a) $]-1, 1[$ b) $]1, +\infty[$ c) $]-\frac{1}{2}, 1[$
d) $]-\infty, 1[$ e) vazio

5) (ITA-99) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação: $\log_{1/4}(x + 1) = \log_4(x - 1)$. Então:

a) S é um conjunto unitário e $S \subset ]2, +\infty[$.
b) S é um conjunto unitário e $S \subset ]1, 2[$.
c) S possui dois elementos distintos e $S \subset ]-2, 2[$.
d) S possui dois elementos distintos e $S \subset ]1, +\infty[$.
e) S é o conjunto vazio.

6) (ITA-99) Sejam $f, g, h$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funções tais que a função composta $h \circ g \circ f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é a função identidade. Considere as afirmações:
I - A função $h$ é sobrejetora.
II- Se $x_0 \in \mathbf{R}$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ com $x \neq x_0$.
III- A equação $h(x) = 0$ tem solução em $\mathbf{R}$.
Então:
a) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são falsas.

7) (ITA-99) Considere as matrizes
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Se $x$ e $y$ são soluções do sistema $(AA' - 3I)X = B$, então x + y é igual a:
a) 2  b) 1  c) 0  d) – 1  e) – 2

8) (ITA-99) Sejam x, y e z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível
$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Então:
a) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a x + 1.
b) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a 0.
c) A soma dos termos da primeira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.
d) O produto dos termos da segunda linha de $A^{-1}$ é igual a y.
e) O produto dos termos da terceira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.

9) (ITA-99) Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4\,\mathrm{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de sen 2x + sen 4x
a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$  b) $\frac{\sqrt{15}}{8}$  c) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$
d) ½  e) 1

10) (ITA-99) O conjunto de todos os números reais q > 1, para os quais $a_1$, $a_2$ e $a_3$, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:
a) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$  b) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$
c) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}]$  d) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}[$

e) $]1, 1+\sqrt{5}[$

11) (ITA-99) Sejam $a_k$ e $b_k$ números reais com k = 1, 2, ..., 6. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo k = 1, 2, ..., 6. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão -1/5 e soma 9, então $z_3$ é igual a:

a) $2i$ b) $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$ c) $\sqrt{3}+i$

d) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{73}}{5}i$ e) $\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{17}}{5}i$

12) (ITA-99) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:

a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
c) C e E são tangentes exteriormente.
d) C e E são tangentes interiormente.
e) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

13) (ITA-99) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$ e) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

14) (ITA-99) Duas circunferências $C_1$ e $C_2$, ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja $C_3$ outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)$m e que tangência $C_1$ e $C_2$. A área, $m^2$, da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) $1 - \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$ c) $(\sqrt{2}-1)^2$

d) $\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ e) $\pi(\sqrt{2}-1)-1$

15) (ITA-99) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

a) 10 b) 17 c) 20 d) 22 e) 23

***Nota**: resolva as questões numeradas de 16 a 25 no caderno de respostas. Na folha de leitura óptica assinale a alternativa escolhida em cada uma das 25 questões. Ao terminar a prova, entregue ao fiscal o caderno de respostas e a folha de leitura óptica.*

16) (ITA-99) Considere as funções *f* e *g* definidas por $f(x) = x - 2/x$, para $x \neq 0$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas a s soluções da inequação $(g \circ f)(x) < g(x)$ é:

a) $[1, +\infty[$ b) $]-\infty, -2[$ c) $[-2, -1[$

d) ]– 1, 1[  e) ]– 2, – 1[ $\cup$ ]1, + $\infty$[

17) (ITA-99) Seja $a \in \Re$ com $a > 1$. Se $b = \log_2 a$, então o valor de

$$\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1} \quad \text{é:}$$

a) $2b-3$  b) $\frac{65}{18}b+2$  c) $\frac{2b^2-3b+1}{2}$

d) $\frac{2b^2+63b+36}{18}$  e) $\frac{b^2+9b+7}{9}$

18) (ITA-99) Seja p(x) um polinômio de grau 3 tal que $p(x) = p(x + 2) - x^2 - 2$, para todo $x \in \boldsymbol{R}$. Se – 2 é uma raiz de p(x), então o produto de todas as raízes de p(x) é:
a) 36  b) 18  c) – 36  d) – 18  e) 1

19) (ITA-99) A equação polinomial p(x) = 0 de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite i como raiz. Se $p(2) = -\frac{105}{8}$ e $p(-2) = \frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de p(x) é igual a:
a) 10  b) 8  c) 6  d) 2  e) 1

20) (ITA-99) O conjunto de todos os números complexos z, $z \neq 0$, que satisfazem à igualdade
$|z + 1 + i| = ||z| - |1 + i||$ é:
a) $\{z \in C: \arg z = 5\pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
b) $\{z \in C: \arg z = \pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
c) $\{z \in C: |z| = 1 \text{ e } \arg z = \pi/6 + k\pi, k \in Z\}$
d) $\{z \in C: |z| = \sqrt{2} \arg z = \pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
e) $\{z \in C: \arg z = \pi/4 + k\pi, k \in Z\}$

21) (ITA-99) Seja $a \in \boldsymbol{R}$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. A expressão

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}\operatorname{cotg}^2 a}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$  b) $\frac{\sqrt{2}\operatorname{cotg} a}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$  c) $\frac{\sqrt{2}}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$

d) $\frac{1+3\operatorname{cotg} a}{2}$  e) $\frac{1+2\operatorname{cotg} a}{1+\operatorname{cotg} a}$

22) (ITA-99) A soma de todos os valores de $a \in [0, 2\pi[$ que tornam o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x \operatorname{sen} a + y \cos a + z(2 \operatorname{sen} a + \cos a) = 0 \\ x \operatorname{sen}^2 a + y \cos^2 a + z(1 + 3\operatorname{sen}^2 a + 2 \operatorname{sen} 2a) = 0 \end{cases}$$

possível e indeterminado é:
a) $5\pi$  b) $4\pi$  c) $3\pi$  d) $2\pi$  e) $\pi$

23) (ITA-99) Pelo ponto C: (4, – 4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola y = $(x – 4)^2$ + 2 nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:
a) $6\sqrt{12}$ b) $\sqrt{12}$ c) 12 d) 8 e) 6

24) (ITA-99) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em $m^2$, do triângulo ABC é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ c) $9\sqrt{3}$
d) $27\sqrt{2}$ e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

25) (ITA-99) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8m, 10m, e 12m. O volume, em $m^3$, do sólido formado é:
a) $15\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{30}$ c) $6\sqrt{15}$
d) $30\sqrt{6}$ e) $45\sqrt{6}$

## ITA 1999/2000

Obs. As questões de 16 a 25 devem ser justificadas.

1) (ITA-00) Sejam $f, g : R \to R$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3\cos 5x}$. Podemos afirmar que:
(A) $f$ é injetora e par e $g$ é ímpar.
(B) $g$ é sobrejetora e $g \circ f$ é par.
(C) $f$ é bijetora e $g \circ f$ é ímpar.
(D) $g$ é par e $g \circ f$ é impar.
(E) $f$ é ímpar e $g \circ f$ é par.

2) (ITA-00) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito $X$. Sejam $A, B$ e $C$ conjuntos tais que $n(A \cup B)$=8, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a :
(A) 11 (B) 14 (C) 15
(D) 18 (D) 25

3) (ITA-00) Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!(20-n)!} x^n$ uma função real de variável real em que $n!$ indica o fatorial de $n$. Considere as afirmações:
(I) $f(1) = 2$.
(II) $f(-1) = 0$.
(III) $f(-2) = 1$.
Podemos concluir que :
(A) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.

(B) Somente as afirmações II e III são verdadeiras.
(C) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(D) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(E) Apenas a afirmação III é verdadeira.

4) (ITA-00) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1,2,3,4,5$ e $6$, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?
(A) 144 (B) 180 (C) 240 (D) 288 (E)360

5) (ITA-00) Sendo 1 e $1+2i$ raízes da equação $x^3+ax^2+bx+c=0$, em que $a,b$ e $c$ são números reais, então:
(A) $b+c=4$ (B) $b+c=3$ (C) $b+c=2$
(D) $b+c=1$ (E) $b+c=0$

6) (ITA-00) A soma das raízes reais e positivas da equação $4^{x^2}-5\cdot 2^{x^2}+4=0$ vale:
(A) 2 (B) 5 (C) $\sqrt{2}$
(D) 1 (E) $\sqrt{3}$

7) (ITA-00) Sendo $I$ um intervalo de números reais com extremidades em $a$ e $b$m com $a<b$, o número real $b-a$ é chamado de comprimento de $I$. Considere a inequação:
$6x^4-5x^3-7x^2+4x<0$
A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{3}$
(D) $\frac{11}{6}$ (E) $\frac{7}{6}$

8) (ITA-00) Seja $S=[-2,2]$ e considere as afirmações:
(I) $\frac{1}{4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x<6$, para todo $x\in S$.
(II) $\frac{1}{\sqrt{32-2^x}}<\frac{1}{\sqrt{32}}$, para todo $x\in S$.
(III) $2^{2x}-2^x\le 0$, para todo $x\in S$.
Então, podemos afirmar que:
(A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas III é verdadeira.
(C) Somente I e II são verdadeiras.
(D) Apenas II é falsa.
(E) Todas as afirmações são falsas.

9) (ITA-00) Seja $z_0$ o número complexo $1+i$. Sendo $S$ o conjunto solução no plano complexo de $|z-z_0|=|z+z_0|=2$, então o produto dos elementos de $S$ é igual a :
(A) $4(1-i)$ (B) $2(1+i)$ (C) $2(i-1)$

(D) $-2i$ (E) $2i$

10) (ITA-00) Considere $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x - \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Sobre $f$ podemos afirmar que:
(A) É uma função par.
(B) É uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi$.
(C) É uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
(D) É uma função periódica de período fundamental $2\pi$.
(E) Não é par, não é ímpar e não é periódica.

11) (ITA-00) O valor de n que torna a seqüência
$2+3n, \quad -5n, \quad 1-4n$
uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
(A) $[-2,-1]$ (B) $[-1,0]$ (C) $[0,1]$
(D) $[1,2]$ (E) $[2,3]$

12) (ITA-00) Considere um triângulo isósceles $ABC$, retângulo em $A$. Seja $D$ a intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$ e $E$ um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}\,cm$, então a área do círculo inscrito no triângulo $EBC$ é:
(A) $\pi(4-2\sqrt{3})\,cm^2$ (B) $2\pi(3-2\sqrt{2})\,cm^2$
(C) $3\pi(4-2\sqrt{3})\,cm^2$ (D) $4\pi(3-2\sqrt{2})\,cm^2$
(E) $\pi(4-2\sqrt{2})\,cm^2$

13) (ITA-00) A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A:(2,1)$ e $B:(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:
(A) $(-1/2,0)$ ou $(5,0)$. (B) $(-1/2,0)$ ou $(4,0)$.
(C) $(-1/3,0)$ ou $(5,0)$. (D) $(-1/3,0)$ ou $(4,0)$.
(E) $(-1/5,0)$ ou $(3,0)$.

14) (ITA-00) Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a $5\,cm$ do eixo e separa na base um arco de 120º. Sendo de $30\sqrt{3}\,cm^2$ a área da secção plana regular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em $cm^3$:
(A) $30\pi - 10\sqrt{3}$ (B) $30\pi - 20\sqrt{3}$
(C) $20\pi - 10\sqrt{3}$ (D) $50\pi - 25\sqrt{3}$
(E) $100\pi - 75\sqrt{3}$

15) (ITA-00) Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}\,cm$ cm e raio da base de $2\,cm$ está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a :

(A) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ (B) $\frac{9}{4}(\sqrt{2}-1)$

(C) $\frac{9}{4}(\sqrt{6}-1)$ (D) $\frac{27}{8}(\sqrt{3}-1)$

(E) $\frac{27}{16}(\sqrt{3}-1)$

16) (ITA-00) Duas retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas à reta $3x-y=37$ e tangentes à circunferência $x^2-y^2-2x-y=0$. Se $d_1$ é a distância de $r_1$ até a origem e $d_2$ a distância de $r_2$ até a origem, então $d_1+d_2$ é igual a :

(A) $\sqrt{12}$ (B) $\sqrt{15}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{10}$ (E) $\sqrt{5}$

17) (ITA-00) Sabe-se que $x$ é um número real pertencente a ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, cosseno de $x$ é igual a :

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{15}{26}$ (E) $\frac{13}{49}$

18) (ITA-00) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por $x^2+x$, obtêm-se o quociente $Q(x)=x^2-3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4)=10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a :

(A) – 5 (B) – 3 (C) – 1 (D) 1 (E) 3

19) (ITA-00) Considere as matrizes

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Se $X$ é solução de $M^{-1}NX=P$, então $x^2+y^2+z^2$ é igual a:

(A) 35 (B) 17 (C) 38 (D) 14 (E) 29

20) (ITA-00) Sendo $x$ um número real positivo, considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}\log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1\\ 0 & -\log_3 x & 1\end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de $x$ para os quais $(AB)=(AB)^T$ é igual a :

(A) $\frac{25}{3}$ (B) $\frac{28}{3}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{27}{2}$ (E) $\frac{25}{2}$

21) (ITA-00) Considere as matrizes

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e $a, b$ e $c$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q>0$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2$ e $\lambda_3$ as raízes da equação $\det(M-\lambda I)=0$. Se

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+7a$,

então $a^2+b^2+c^2$ é igual a :

(A) $\frac{21}{8}$ (B) $\frac{91}{9}$ (C) $\frac{36}{9}$ (D) $\frac{21}{16}$ (E) $\frac{91}{36}$

22) (ITA-00) Num triângulo acutângulo $ABC$, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede $5cm$. Sabendo:

$$\hat{A}=\arccos\frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \hat{C}=\text{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}},$$

então a área do triângulo ABC é igual a :

(A) $\frac{5}{2}cm^2$ (B) $12cm^2$ (C) $15cm^2$

(D) $2\sqrt{5}\,cm^2$ (E) $\frac{25}{2}cm^2$

23) (ITA-00) Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base $6cm$ e altura de $4cm$. Seja $t$ a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de $t$ compreendido entre os lados do triângulo mede :

(A) $1cm$ (B) $1{,}5cm$ (C) $2cm$

(D) $2{,}5cm$ (E) $3cm$

24) (ITA-00) Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}cm$. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a :

(A) $2(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6})cm$ (B) $2(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2})cm$

(C) $2(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3})cm$ (D) $2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})cm$

(E) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})\,cm$

25) (ITA-00) Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\text{sen}(2x) - \text{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) > 0$$

é o intervalo definido por

(A) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

(E) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

# ITA 2000/2001

As questões de 1a 15 não devem ser resolvidas no caderno de soluções. Para respondê-las, marque a opção escolhida para cada questão na folha de leitura óptica e também na última página do caderno de soluções.

R é o conjunto dos números reais.
$A^c$ denota o conjunto complementar de $A \subset R$ em R.
$A^T$ é a matriz transposta da matriz A.
(a, b) representa o par ordenado.

[a, b] = {x $\in$ R; a $\leq$ x $\leq$ b} , ]a,b[ = {x $\in$ R; a < x < b}
[a, b[ = {x $\in$ R; a $\leq$ x < b} , ]a,b] = {x $\in$ R; a < x $\leq$ b}

1) (ITA-01) Se a $\in$ R é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$

a) $\log_2 6$ b) $-\log_2 6$ c) $\log_3 6$
d) $-\log_3 6$ e) $1 - \log_3$

2) (ITA-01) O valor da soma a + b para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão 1/2 é.

a) 36 b) 41 c) 26 d) – 27 e) –20

3) (ITA-01) Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z.\overline{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de z, w, então $\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\pi$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

4) (ITA-01) O número complexo $z = \frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha} + \frac{1 - 2\cos\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,2a}$ ; a $\in$ ]0, $\pi$ /2[ tem argumento $\pi$ /4.

Neste caso, $\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{9}$

5) (ITA-01) Um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma seqüência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

6) (ITA-01) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de *m* elementos, tomados 2 a 2, é:
a) 80 b) 90 c) 70 d) 100 e) 60

7) (ITA-01) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que, para cada n = 1, 2, 3, ... , a diferença $a_n - b_n$ é igual a:
a) $\frac{n!}{n+1}a_n$ b) $\frac{2n}{n+1}a_n$ c) $\frac{n}{n+1}a_n$
d) $\frac{2}{n+1}a_n$ e) $\frac{1}{n+1}a_n$

8) (ITA-01) Sejam A e B matrizes n x n , e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

I. $AB + BA^T$ é simétrica.
II. $(A + A^T + B)$ é simétrica.
III. $ABA^T$ é simétrica.

temos que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e III são verdadeiras
e) todas as afirmações são verdadeiras

9) (ITA-01) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10) (ITA-01) Sendo $\alpha$ e $\beta$ os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então sen $\alpha$ é igual a:
a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ e) zero

11) (ITA-01) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128m^3$, temos que o raio da base e altura do cone medem, respectivamente, em metros:
a) 9 e 8 b) 8 e 6 c) 8 e 7 d) 9 e 6 e) 10 e 8

12) (ITA-01) De dois polígonos convexos, um tem a mais que outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:
a) 53 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

13) (ITA-01) Seja o ponto A = (r , 0) , r $>$ 0. O lugar geométrico dos pontos P = (x ,y) tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P e A e o dobro do quadrado da distância de P à rota y = – r é:
a) uma circunferência centrada em (r, – 2r) com raio r.
b) uma elipse centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo r e 2r.
c) uma parábola com vértice em (r, –r)
d) duas retas paralelas distando r $\sqrt{3}$ uma da outra.
uma hipérbole centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo r.

14) (ITA-01) Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de R, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I. $x \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup Y^C)^C\}$
II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup (X \cup (Z^C \cap Y)\} = X \cup Y$.
III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$.

temos que:
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas II e III são verdadeiras
e) todas são verdadeiras.

15) (ITA-01) Se f : ]0, 1[ $\rightarrow$ R é tal que, $\forall x \in$ ]0,1[,...

$|f(x)| < \frac{1}{2}$ e $f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$

então a desigualdade válida para qualquer n = 1, 2, 3, ...e 0 $<$ x $<$ 1 é:

a) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$ d) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$

b) $\frac{1}{2^n} \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}$ e) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$

c) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$

As questões de 16 a 25 devem ser resolvidas no caderno de soluções. Marque também as opções escolhidas para essas questões na folha de leitura óptica e no quadro que se encontra na última página do caderno de soluções.

16) (ITA-01) Considere as funções

f(x) = $\frac{5+7^x}{4}, g(x) = \frac{5\ \ 7^x}{4}$ e h(x) = arc tg a:

Se $\alpha$ é tal que h (f(a)) + h(g(a) = $\pi$ /4, então f(a) – g(a) vale:

a) 0 b) 1 c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{7}{2}$ e) 7

17) O conjunto de todos os valores de *m* para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$ b) $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ c) $\left]0, \frac{7}{4}\right[$

d) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ e) $\left]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$

18) (ITA-01) A parte imaginária de
$((1 + \cos 2x) + i \text{ sen } 2x)^k$, k inteiro positivo, x real é
a) $2 \text{ sen}^k x. \cos^k x$
b) $\text{sen}^k x. \cos^k x$
c) $2^k \text{sen } kx. \cos^k x$
d) $2^k \text{ sen}^k x. \cos^k x$
e) $\text{sen } kx . \cos^k x$

19) (ITA-01) O polinômio com coeficientes reais
$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:
a) – 4 b) – 6 c) – 1 d) 1 e) 4

20) (ITA–01) Seja $m \in R$, $m > 0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trival é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) $2 \log_2 5$

21) (ITA-01) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?
a) 375 b) 465 c) 545 d) 585 e) 625

22) (ITA-01) Sendo dado
$\ln\left(2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8}\ldots\sqrt[n]{2n}\right) = a_n$ e $\ln\left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$
então, $\frac{\ln 2}{2} \quad \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} \quad \frac{\ln 5}{5} + \ldots + \frac{\ln 2n}{2n}$
é igual a:
a) $a_n - 2b_n$ d) $b_n - a_n$
b) $2a_n - b_n$ e) $a_n + b_n$
c) $a_n - b_n$

23) (ITA-01) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 $m^3$, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

24) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e *a* é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma *a* + *r* (em cm) é igual a:
a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

25) (ITA-01) O coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto P = (8, 0) é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

# ITA 2001/2002

1) (ITA-02) Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I – Se x > 4 e y < 2, então $x^2 - 2y > 12$.
II – Se x > 4 ou y < 2, então $x^2 - 2y > 12$.
III – Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.
Então, destas é (são) verdadeira(s).

a) Apenas I b) Apenas I e II c) Apenas II e III
d) Apenas I e III e) Todas

2) (ITA-02) Sejam a, b, c reais não-nulos e distintos, c > 0. Sendo par a função dada por $f(x)=\frac{ax+b}{x+b}, -c<x<c$, então f(x), para – c < x < c, é constante e igual a:

a) a + b
b) a + c
c) c
d) b
e) a

3) (ITA-02) Os valores de x ∈ R, para os quais a função real por $f(x)=\sqrt{5-||2x-1|-6|}$ está definida, formam o conjunto.

a) [0, 1]
b) [- 5, 6]
c) [- 5, 0] ∪ [1, ∞)
d) [- 5, 6]
e) (- ∞, 0] ∪ [1, 6]

4) (ITA-02) Seja a equação em C

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) -i
e) $\frac{i}{2}$

5) (ITA-02) Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que A ∪ B contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de P (B\A) ∪ P (∅) é igual a:

a) 8 b) 16 c) 20 d) 17 e) 9

6) (ITA-02) Sejam $f$ e g duas funções definidas por

$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3 \operatorname{sen} x - 1}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \operatorname{sen}^2 x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$. A soma do valor mínimo de $f$ com o valor mínimo de g é igual a:

a) 0 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

7) (ITA-02) Seja $f$ : R → P(R) dada por

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R};\ \operatorname{sen} y < x\}.$$

Se A é tal que $f$(x) = R, ∀ x A, então .

a) A= [- 1, 1]. b) A = [a, ∞), ∀ a > 1.

c) A = [a, ∞), ∀ a ≥ 1. d) A = (- ∞, a], ∀ a < - 1.

e) A = (- ∞, a], ∀ a ≤ - 1.

8) (ITA-02) A divisão de um polinômio $f$(x) por (x – 1) (x – 2) tem resto x + 1. Se os restos das divisões de $f$(x) por x – 1 e x – 2 são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale

a) 13 b) 5 c) 2 d) 1 e) 0

9) (ITA-02) Sabendo que a equação

$$x^3 - px^2 = q^m,\ p, q > 0,\ q \neq 1,\ m \in \mathbb{N},$$

possui três raízes reais positivas a, b, e c, então

$$\log_q \left[ abc\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{a+b+c} \right]$$

é igual a:

a) $2m + p \log_q p$ d) $m - p \log_q p$

b) $m + 2p \log_q p$ e) $m - 2p \log_q p$

c) $m + p \log_q p$

10) (ITA-02) Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2 \ln\frac{2}{3} + \ln 6 - \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$$

temos que:

a) A equação $f$(x) = 0 não possui raízes reais.

b) A equação $f$(x) = 0 possui duas raízes reais distintas e o gráficos de $f$ possui concavidade para cima.

c) A equação $f$(x) = 0 possui duas raízes reais iguais e o gráfico de $f$ possui concavidade para baixo.

c) O valor máximo de $f$ é $\frac{\ln 2 . \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

11) (ITA-02) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

a) 1692 d) 1512

b) 1572 e) 1392

c) 1520

12) (ITA-02) O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: “Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado alado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posição trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida.”
Com base no trecho acima, você conclui que:
a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em segundo lugar.
e) Não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

13) (ITA-02) Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 25° & \text{sen } 65° \\ \text{sen } 120° & \cos 390° \end{bmatrix}$$

O valor de seu determinado é:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) 1
b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) 0
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14) (ITA-02) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que AB = A e BA = B. Então, $[(A + B)^t]^2$ é igual a:
a) $(A + B)^2$. d) $A^t + B^t$.
b) $2 (A^t . B^t)$. e) $A^t B^t$.
c) $2 (A^t + B^t)$.

15) (ITA-02) Seja A uma matriz real 2 x 2. Suponha que $\alpha$ e $\beta$ sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais 2 x 1 não-nulas, tais que $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$. Se a, b $\in$ R são tais que aV + bW é igual à matriz nula 2 x 1, então a + b vale:

a) 0 b) 1 c) – 1 d) $\frac{1}{2}$ e) - $\frac{1}{2}$

16) (ITA-02) O triângulo ABC, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi}$ cm, cujo ângulo oposto é de 15°. O comprimento da circunferência, em cm, é

a) $20\sqrt{2}\ (1 + \sqrt{3})$. d) $10\ (2\sqrt{3} + 5)$
b) $400\ (2 + \sqrt{3})$. e) $20\ (1 + \sqrt{3})$
c) $80\ (1 + \sqrt{3})$.

17) (ITA-02) Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente , se interceptam na origem 0. Se B $\in$ r e C $\in$ s são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a $12 \times 10^{-1}$, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale:

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 1

18) (ITA-02) Seja k > 0 tal que a equação $(x^2 – x) + k\ (y^2 – y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p, q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 – q \neq 0$, então $\frac{p - p^2}{q^2 - q}$ é igual a:

a) $2 + \sqrt{5}$ d) $2 - \sqrt{3}$
b) $2 – \sqrt{5}$ e) 2
c) $2 + \sqrt{3}$

19) (ITA-02) Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade
$x^2 + 4x + y^2 – 4y – 8 \leq 0$.

Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta x + y = 0, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a:

a) $\frac{128}{3}\pi$ d) $\frac{128}{6}\pi$
b) $\frac{128}{4}\pi$ e) $\frac{128}{7}\pi$
c) $\frac{128}{5}\pi$

20) (ITA-02) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

a) 2m b) 4m c) 5m d) 6m e) 8m

21) (ITA-02) Seja a função $f$ dada por

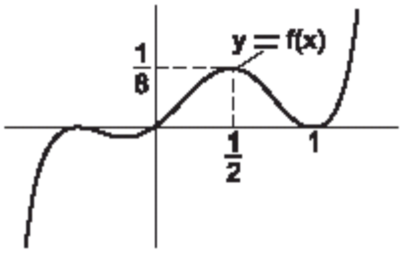
$$f(x) = (\log_3 5).\log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$

Determine todos os valores de x que tornam $f$ não-negativa.

22) (ITA-02) Mostre que $\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a q.

23) (ITA-02) Com base no gráfico da função polinomial y = f(x) esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de f(x) por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.




24) (ITA-02) Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se z, w $\in$ C satisfazem

$$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de |a | de forma que | zw | = 1.

25) (ITA-02) 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

Então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz a equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução (x, y) $\neq$ (0, 0)? Justifique.

26) (ITA-02) Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \dots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ e responda, justificando: Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

27) (ITA-02) Considere n pontos distintos $A_1, A_2, \dots, A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, formam uma

progressão geométrica de termo inicial $\pi$ e razão $\frac{1}{2}$. Para que valores de $n \in N$ teremos o comprimento do arco $A_nA_1$ menor que $\frac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?

29) (ITA-02) Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro C = (h, 0) e raio r intercepta a curva $y = +\sqrt{x}$, $x > 0$, no ponto A = $(a, \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então x = a é raiz dupla da equação em x que se obtém da interseção da curva com a circunferência." Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

30) (ITA-02) Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

# ITA 2002/2003

1) (ITA-03) Seja $z \in C$. Das seguintes afirmações independentes:

I – Se $\omega = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II – Se $z \neq 0$ e $\omega = \frac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então $|\omega| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III – Se $\omega = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então 2 arg z + $\frac{\pi}{12}$ é um argumento de $\omega$.

é (são) verdadeira(s):

a) todas. d) apenas I e III.
b) apenas I e II. e) apenas II.
c) apenas II e III.

2) (ITA-03) O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números sen $\frac{\pi}{12}$; x, y, z e sen 75°, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

a) $3^{-4}$ b) $2^{-6}$ c) $6^{-2}$ d) $2^{-5}$ e) $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

3) (ITA-03) Considere a função:

$f : Z \setminus \{0\} \to IR$, $f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1$.

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 6

4) (ITA-03) Considere uma função $f$ : IR $\rightarrow$ IR não-constante e tal que $f$ (x + y) = $f$(x) $f$(y), $\forall$x, y $\in$ IR.
Das afirmações:
I - $f$(x) > 0, $\forall$x $\in$ IR.
II - $f$(nx) = $[f(x)]^n$, $\forall$x $\in$ IR, $\forall$n $\in$ IN*.
III - $f$ é par.
é (são) verdadeira(s):
a) apenas I e II. d) todas.
b) apenas II e III. e) nenhuma.
c) apenas I e III.

5) (ITA-03) Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, cujos coeficientes 2, $a_2$, ... , $a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q > 0. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que P(2) = 5 460, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{11}{6}$ e) $\frac{15}{8}$

6) (ITA-03) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x – 1), obtém-se resto igual a 2,. Dividindo-se P(x) por (x + 1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que P(x) é divisível por (x – 2), tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) – 6 b) – 4 c) 4 d) 7 e) 9

7) (ITA-03) Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:
I – A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
II – A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.
III – Se x $\in$ N* e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

é (são) verdadeira(s):
a) nenhuma. d) apenas III.
b) apenas I. e) apenas I e III.
c) apenas II.

8) (ITA-03) Seja k $\in$ IR tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira $x_1$ e uma raiz $x_2$, distinta de $x_1$. Então, $(k + x_1)\, x_2$ é igual a:
a) – 6 b) – 3 c) 1 d) 2 e) 8

9) (ITA-03) Considere o conjunto S = {(a, b) $\in$ IN x IN: a + b = 18}. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall$ (a, b) $\in$ S, é:
a) $8^6$ b) 9! c) $9^6$ d) $12^6$ e) 12!

10) (ITA-03) O número de divisores de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
a) 24 b) 36 c) 48 d) 54 e) 72

11) (ITA-03) Sejam A e P matrizes n x n inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:
I – $B^T$ é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.
II – Se A é simétrica, então B também o é.
III – $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)
é (são) verdadeira(s):
a) todas. d) apenas I e III.
b) apenas I. e) apenas II e III.
c) apenas I e II.

12) (ITA-03) O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por $\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$, é possível e não-homogêneo, é igual a:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

13) (ITA-03) Para todo $x \in$ IR, a expressão $[\cos(2x)]^2 [\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:
a) $2^{-4} [\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
b) $2^{-4} [2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
c) $2^{-4} [-\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
d) $2^{-4} [-\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
e) $2^{-4} [\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)]$.

14) (ITA-03) Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x)$ = arcsen x arccos x, temos que:
a) $f$ é não-crescente e ímpar. c) $f$ é injetora.
b) $f$ não é par nem ímpar. d) $f$ é constante.
c) $f$ é sobrejetora.

15) (ITA-03) Considere a família de circunferência com centro no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:
a) de uma elipse. d) de duas retas concorrentes.
b) de uma parábola. e) da reta y = -x .
c) de uma hipérbole.

16) (ITA-03) A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \text{IR}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:
a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $\frac{10}{3}$

17) (ITA-03) Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de *r*. A área do triângulo equilátero *PQR*, cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, é igual, em $cm^2$, a:

a) $3\sqrt{15}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{6}$ d) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ e) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

18) (ITA-03) Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3 780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e)106

19) (ITA-03) Considere o triângulo isósceles *OAB*, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}$ R e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}R^3$ b) $\pi R^3$ c) $\frac{4\pi}{3}R^3$ d) $\sqrt{2}\,\pi R^3$ e) $\sqrt{3}\,\pi R^3$

20) (ITA-03) Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 $cm^2$. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $\sqrt{3}$

**As questões de 21 a 30 deverão ser resolvidas no caderno de respostas anexo.**

21) (ITA-03) Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I – Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.

II – $B \setminus A^C = B \cap A$.

22) (ITA-03) Determine o conjunto dos números complexos *z* para os quais o número $\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

23) (ITA-03) Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes $v_A$ e $v_T$, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que Aquiles precisa para percorrer as distância $d_1, d_2, d_3, \ldots$, respectivamente, sendo que, para todo $n > 2$, $d_n$ denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos $t_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

24) (ITA-03) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

25) (ITA-03) Sejam *a, b, c* e *d* constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a $-5$, determine o valor de $a + b + c + d$.

26) (ITA-03) Sejam *a, b, c* e *d* números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$ na forma de um produto de números reais.

27) (ITA-03) Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x, $\text{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a$, admite soluções.

28) (ITA-03) Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente á elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

29) (ITA-03) Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

30) (ITA-03) Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes extremamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

# ITA 2003/2004

1) (ITA-04) Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto **U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**:
I - $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$.
II - $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$.
III – $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV – $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s).
a) apenas I e III b) apenas II e IV c) apenas II e III d) apenas IV e) todas as afirmações

2) (ITA-04) Seja o conjunto **S = { r** $\in \mathbb{Q} : r \geq 0$ e $r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:
I - $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$

II - $\{x \in \Re : 0 \le x \le \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$

III - $\sqrt{2} \in S$

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas.

a) I e II  b) I e III  c) II e III

d) I  e) II

3) (ITA-04) Seja $\alpha$ um número real, com **0 < $\alpha$ < 1**. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de **x** tais que $\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  b) $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$  c) $]0, 2[$  d) $]-\infty, 0[$  e) $]2, +\infty[$

4) (ITA-04) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2\cos x + 2i \operatorname{sen} x$. Então, $\forall$**x, y** $\in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x)\, f(y)$ é igual a:

a) $f(x + y)$  b) $2f(x + y)$  c) $4if(x + y)$  d) $f(xy)$  e) $2f(x) + 2if(y)$

5) (ITA-04) Considere **12 pontos** distintos dispostos no plano, **5** dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, **2** destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

6) (ITA-04) Seja **x** $\in \mathbb{R}$ e a matriz **A** = $\begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.

b) Apenas para x > 0, A possui inversa.

c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.

d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

7) (ITA-04) Considerando as funções **arc sen:** $[-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e **arc cos: [-1, +1] → [0, $\pi$]**, assinale o valor de $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

8) (ITA-04) Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a **5°**. Então, seu maior ângulo mede, em graus.

a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

9) (ITA-04) O termo independente de **x** no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$  b) $972\sqrt[3]{15}$  c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

10) (ITA-04) Considere as afirmações dadas a seguir, em que **A** é uma matriz quadrada **n x n**, **n** $\geq$ **2**:
I – O determinante de **A** é nulo se e somente se **A** possui uma linha ou uma coluna nula.
II – Se **A = ($a_{ij}$)** é tal que $a_{ij} = 0$ para **i > j**, com **i, j = 1, 2, ..., n**, então $\det A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.
III – Se **B** for obtida de **A**, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então **det B = det A**.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s).
a) apenas II b) apenas III c) apenas I e II
d) apenas II e III e) todas

11) (ITA-04) Considere um cilindro circular reto, de volume igual a **360π cm³**, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ **cm³**, então, a área lateral da pirâmide mede, em **cm²**.
a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$
d) $108\sqrt{427}$ e) $45\sqrt{427}$

12) (ITA-04) O conjunto de todos os valores de $\alpha$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em **x**) $x^4 - \sqrt[4]{48}\, x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ são todas reais, é:
a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$
d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

13) (ITA-04) Sejam as funções $f$ e **g** definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que $\alpha$ e $\beta$ são números reais. Considere que estas funções são tais que:

| $f$ | | G | |
|---|---|---|---|
| Valor mínimo | Ponto de mínimo | Valor máximo | Ponto de máximo |
| -1 | < 0 | $\frac{9}{4}$ | > 0 |

Então, a soma de todos os valores de **x** para os quais **(fog) (x) = 0** é igual a:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

14) (ITA-04) Considere todos os números **z = x + iy** que têm módulo $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a:
a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{81}{25}$ d) $\frac{25}{7}$ e) 4

15) (ITA-04) Para algum número real **r**, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de **r**?
a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

16) (ITA-04) Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos **(x, y)** do plano satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288\,.$$

a) Uma elipse b) Uma parábola
c) Uma circunferência d) Uma hipérbole
e) Uma reta

17) (ITA-04) A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0,\ z \in \mathbb{C}$, é igual a:
a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

18) (ITA-04) Dada a equação $x^3 + (m + 1)\,x^2 + (m + 9)\,x + 9 = 0$, em que **m** é uma constante real, considere as seguintes afirmações:
I – Se $m \in\ ]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
II – Se $m = -6$ ou $m = +6$. então existe raiz com multiplicidade **2**.
III - $\forall\ m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas.
a) I b) II c) III d) II e III e) I e II

19) (ITA-04) Duas circunferências concêntricas $C_1$ e $C_2$ têm raios de **6 cm** e $6\sqrt{2}$ **cm**, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de $C_2$, tangente à $C_1$. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overline{AB}$ mede, em $cm^2$.
a) $9(\pi - 3)$ b) $18(\pi + 3)$ c) $18(\pi - 2)$
d) $18(\pi + 2)$ e) $16(\pi + 3)$

20) (ITA-04) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede $\mathbb{R}$ **cm**, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em $cm^3$, é igual a:
a) $\pi R^3$ b) $\pi\sqrt{2}\,R^3$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Re^3$ d) $\pi\sqrt{3}\,R^3$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Re^3$

**As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.**

21) (ITA-04) Seja **A** um conjunto não-vazio.
a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de **m**.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor $k$, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

22) (ITA-04) Uma caixa branca contém **5 bolas verdes** e **3 azuis**, e uma caixa contém **3 bolas verdes** e **2 azuis**. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, **2** dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que **4**, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais caso, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

23) (ITA-04) Determine os valores reais do parâmetro **a** para os quais existe um número real **x** satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

24) (ITA-04) Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}\right|$.

25) (ITA-04) Para **b > 1** e **x > 0**, resolva a equação em $x$: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

26) (ITA-04) Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que **d** é uma constante real. Para qual valor de **d** a equação admite uma raiz dupla no intervalo **] 0, 1[**?

27) (ITA-04) Prove que, se os ângulos internos $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ de um triângulo satisfazem a equação **sen (3**$\alpha$**) + sen (3**$\beta$**) + sen (3**$\gamma$**) =** 0, então, pelo menos, um dos três ângulos internos $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ é igual a **60°**.

28) (ITA-04) Se **A** é uma matriz real, considere as definições:
I – Uma matriz quadrada **A** é ortogonal se e só se **A** for inversível e $A^{-1} = A^T$.
II – Uma matriz quadrada **A** é diagonal se e só $a_{ij} = 0$, para todo **i, j = 1, ... n**, com $i \neq j$.
Determine as matrizes quadradas de ordem **3** que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

29) (ITA-04) Sejam **r** e **s** duas retas que se interceptam segundo um ângulo de **60°**. Seja $C_1$ uma circunferência de **3 cm** de raio, cujo centro **O** se situa em **s**, a **5 cm** de **r**. Determine o raio da menor circunferência tangente à $C_1$ e à reta **r**, cujo centro também se situa na reta **s**.

30) (ITA-04) Sejam os pontos **A : (2,0), B : (4,0)** e **P : (3,5 + 2**$\sqrt{2}$**)**.
a) Determine a equação da circunferência **C**, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos **A** e **B** e é tangente ao eixo **y**.
b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência **C** que passam pelo ponto **P**.

## ITA 2004/2005

**1)** (ITA-05) Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0, 1] e as afirmações:
**I –** $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
**II –** $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
**III –** Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
**IV –** Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.
Então, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas IV. c) apenas I e IV.
d) apenas II e III. e) apenas III e IV.

**2)** (ITA-05) Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50 b) R$ 16,50 c) R$ 12,50
d) R$ 10,50 e) R$ 9,50

**3)** (ITA-05) Uma circunferência passa pelos pontos A = (0, 2), B = (0, 8) e C = (8, 8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
a) (0, 5) e 6 b) (5, 4) e 5 c) (4, 8) e 5,5
d) (4, 5) e 5 e) (4, 6) e 5

**4)** (ITA-05) Sobre o número x = $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ é correto afirmar que
a) $x \in ]0, 2[$ b) x é racional c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) $x^2$ é irracional e) $x \in ]2, 3[$

**5)** (ITA-05) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se m($\overline{AB}$) = 8 cm, m($\overline{AC}$) = 10 cm, m($\overline{AD}$) = 4 cm e m($\overline{AE}$) = 6 cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{3}{4}$

**6)** (ITA-05) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a
a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**7)** (ITA-05) A circunferência inscrita num triângulo eqüilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)
a) $3\sqrt{3}$ b) 6 c) 5 d) 4 e) $2\sqrt{5}$

**8)** (ITA-05) Uma esfera de raio *r* é seccionada por *n* planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então *n* é igual a
a) 4 b) 3 c) 6 d) 5 e) 7

**9)** (ITA-05) Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a
a) 11 b) 32 c) 10 d) 20 e) 22

**10)** (ITA-05) Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por A = (0, 0), B = (2, 2) e C = ($1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$). O volume do tetraedro é
a) $\frac{8}{3}$ b) 3 c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e) 8

**11)** (ITA-05) No desenvolvimento de $(ax^2 – 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a
a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

**12)** (ITA-05) O menor inteiro positivo **n** para o qual a diferença $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
a) 2499 b) 2501 c) 2500 d) 3600 e) 4900

**13)** (ITA-05) Seja D = IR \ {1} e f : D $\to$ D uma função dada por $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
Considere as afirmações:
**I –** f é injetiva e sobrejetiva.
**II –** f é injetiva, mas não sobrejetiva.
**III –** $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, para todo x $\in$ D, x $\neq$ 0.
**IV –** f(x) . f(–x) = 1, para todo x $\in$ D.
Então, são verdadeiras:
a) apenas I e III. b) apenas I e IV c) apenas II e III
d) apenas I, III e IV e) apenas II, III e IV

**14)** (ITA-05) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$ com p, q $\in$ IR. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é
a) 4 b) –4 c) 6 d) 5 e) –5

**15)** (ITA-05) Considere a equação em x: $a^{x+1} = b^{1/x}$, onde **a** e **b** são números reais positivos, tais que ln b = 2 ln a > 0. A soma das soluções da equação é
a) 0 b) –1 c) 1 d) ln 2 e) 2

**16)** (ITA-05) O intervalo I $\subset$ IR que contém todas as soluções da inequação $\arctan\frac{1+x}{2}+\arctan\frac{1-x}{2}\geq\frac{\pi}{6}$ é
a) [–1, 4] b) [–3, 1] c) [–2, 3] d) [0, 5] e) [4, 6]

**17)** (ITA-05) Seja $z \in \mathbb{C}$ com |z| = 1. Então, a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor
a) maior que 1, para todo w com |w| > 1.
b) menor que 1, para todo w com |w| < 1.
c) maior que 1, para todo w com w $\neq$ z.
d) igual a 1, independente de w com w $\neq$ z.
e) crescente para |w| crescente, com |w| < |z|.

**18)** (ITA-05) O sistema linear
$$\begin{cases} bx+y=1 \\ by+z=1 \\ x+bz=1 \end{cases}$$
não admite solução se e somente se o número real **b** for igual a

a) –1 b) 0 c) 1 d) 2 e) –2

**19)** (ITA-05) Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se $P_1$ é a probabilidade de não sair bola azul e $P_2$ é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é
a) 0,21 b) 0,25 c) 0,28 d) 0,35 e) 0,40

**20)** (ITA-05) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**21)** (ITA-05) Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que $\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, para $n \in \mathbb{N}^*$.
Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

**22)** (ITA-05) Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se **t** é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo **x** e tangente simultaneamente à reta **t** e à circunferência C.

**23)** (ITA-05) Sejam A e B matrizes 2x2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que
**a)** $AB^{-1} = B^{-1}A$ **b)** A é inversível

**24)** (ITA-05) Seja **n** o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n – 1 ângulos (internos) do polígono é 2004º, determine o número **n** de lados do polígono.

**25)** (ITA-05) **a)** Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.
**b)** Conclua de (a) que $\alpha$ é um número racional.

**26)** (ITA-05) Considere a equação em $x \in$ IR
$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$, sendo m um parâmetro real.
**a)** Resolva a equação em função do parâmetro **m**.
**b)** Determine todos os valores de **m** para os quais a equação admite solução não nula.

**27)** (ITA-05) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é $\pi$ cm$^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

**28)** (ITA-05) São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

**29)** (ITA-05) Obtenha todos os pares (x, y), com x, y $\in$ [0, 2$\pi$], tais que
$$\begin{cases} \text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases}$$

**30)** (ITA-05) Determine todos os valores reais de **a** para os quais a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas.

# *ITA 2005/2006*

**1)** (ITA-06) Seja E um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos B e A, e, C e D, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto G. Se EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3 e AG = 6, então GF vale
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

**2)** (ITA-06) Seja U um conjunto não vazio com n elementos, n $\geq$ 1. Seja S um subconjunto de P(U) com a seguinte propriedade:
Se A, B $\in$ S, então A $\subset$ B ou B $\subset$ A.
Então, o número máximo de elementos que S pode ter é
a) $2^{n-1}$.
b) n/2, se n for par, e (n + 1)/2 se n for ímpar
c) n + 1 d) $2^n - 1$ e) $2^{n-1} + 1$

**3)** (ITA-06) Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que n(B\A), n(A\B) e n(A $\cap$ B) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r > 0. Sabendo que n(B\A) = 4 e n(A $\cup$ B) + r = 64, então, n(A\B) é igual a
a) 12 b) 17 c) 20 d) 22 e) 24

**4)** (ITA-06) Seja f: IR $\to$ IR definida por f(x) = $\sqrt{77}$ sen[5(x + $\pi$/6)] e seja B o conjunto dado por B = {x $\in$ IR: f(x) = 0}. Se m é o maior elemento de B $\cap$ (–$\infty$, 0) e n é o menor elemento de B $\cap$ (0, +$\infty$), então m + n é igual a
a) 2$\pi$/15 b) $\pi$/15 c) –$\pi$/30
d) –$\pi$/15 e) –2$\pi$/15

**5)** (ITA-06) Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com 0 < a $\neq$ 1. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é
a) (–1, 0) $\cup$ (0, 1) b) (–$\infty$,–1) $\cup$ (1, +$\infty$)
c) (–1, 1) d) (0, $\infty$) e) (–$\infty$, +$\infty$)

**6)** (ITA-06) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é
a) $4^4.30$ b) $4^3.60$ c) $5^3.60$ d) $\binom{7}{3}.4^3$ e) $\binom{10}{7}$

**7)** (ITA-06) Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8\left(4^k\sqrt{2}\right)$:

I – S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita.
II – S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3.
III – S = 3451.
IV – $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas
a) I e III    b) II e III    c) II e IV
d) II    e) III

**8)** (ITA-06) Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a
a) 1    b) 2z    c) 2 Re z
d) 2 Im z    e) $2|z|^2$.

**9)** (ITA-06) O conjunto solução de $(\text{tg}^2x - 1)(1 - \text{cotg}^2x) = 4$,    $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$, é
a) $\{\pi/3 + k\pi/4, k \in Z\}$    b) $\{\pi/4 + k\pi/4, k \in Z\}$
c) $\{\pi/6 + k\pi/4, k \in Z\}$    d) $\{\pi/8 + k\pi/4, k \in Z\}$
e) $\{\pi/12 + k\pi/4, k \in Z\}$

**10)** (ITA-06) Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\ \text{sen}(n\alpha)$, então, é verdade que
a) $2n\alpha$ é múltiplo de $2\pi$.
b) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de $2\pi$.
c) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$.
d) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2.
e) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de $\pi$.

**11)** (ITA-06) A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear
$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$ é

a) $a - b \neq 2$   b) $a + b = 10$ c) $4a - 6b = 0$
d) $a/b = 3/2$   e) $a \cdot b = 24$

**12)** (ITA-06) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p + x & 2q + y & 2r + z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0    b) 4    c) 8    d) 12  e) 16

**13)** (ITA-06) Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1 – i como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e – 40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

a) $3/2 - \sqrt{193}/6$, 3, $3/2 + \sqrt{193}/6$

b) $2 - 4\sqrt{13}$, 2, $2 + 4\sqrt{13}$

c) – 4, 2, 8  d) –2, 3, 8  e) –1, 2, 5

**14)** (ITA-06) Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

a) x = 2 não é raiz de p.

b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.

c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.

d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.

e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

**15)** (ITA-06) Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a-b)x-(a+b)y=1 \\ (a+b)x+(a-b)y=1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I – O sistema é possível e indeterminado se a = b = 0.

II – O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III – $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

a) I  b) II  c) III  d) I e II  e) II e III

**16)** (ITA-06) Considere o polinômio $p(x) = x_3 - (a + 1)$, onde $a \in Z$. O conjunto de todos os valores de *a*, para os quais o polinômio *p* (x) só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in IN\}$  b) $\{4n^2, n \in IN\}$

c) $\{6n - 4n, n \in IN\}$ d) $\{n(n+1), n \in IN\}$

e) IN

**17)** (ITA-06) Numa circunferência $C_1$ de raio $r_1$ = 3 cm está inscrito um hexágono regular $H_1$, em $H_1$ está inscrita uma circunferência $C_2$, em $C_2$ está inscrito um hexágono regular $H_2$ e, assim, sucessivamente. Se $A_n$ (em cm²) é a área do hexágono $H_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm²) é igual a

a) $54\sqrt{2}$  b) $54\sqrt{3}$

c) $36(1+\sqrt{3})$  d) $27/(2+\sqrt{3})$

e) $30(2+\sqrt{3})$

**18)** (ITA-06) Sejam a reta s: 12x – 5y +7 = 0 e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A Reta *p*, que é perpendicular a *s* e é secante a *C*, corta o eixo O*y* num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo.

a) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$  b) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$

c) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$  d) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$

e) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

**19)** (ITA-06) Os focos de uma elipse são $F_1$ (0, - 6). Os pontos A (0, 9) e B(x,3), x > 0, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, $F_1$ e $F_2$ é igual a

a) $22\sqrt{10}$ b) $18\sqrt{10}$ c) $15\sqrt{10}$
d) $12\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

**20)** (ITA-06) Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60º com o plano da base. A área total da pirâmide, em $cm^2$, é

a) $81\sqrt{2}/2$ b) $81\sqrt{2}/2$ c) 81/2
d) $27\sqrt{3}$ e) $27\sqrt{2}$

**21)** (ITA-06) Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elemento. Dizemos que F = $\{A_1, ..., A_m\} \subset P(A)$ é uma **partição de** A se as seguintes condições são satisfeitas:

I . $A_i \neq \emptyset$, i = 1, ...., m

II . $A_i \cap A_J = \emptyset$, se $i \neq j$, para i, j = 1,..., m

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição **de ordem** K se
$n(A_I) = k$, i = 1,m. Supondo que n (A) = 8, determine:
a) As ordens possíveis para uma partição de A
b) O número de partições de A que têm ordem 2

**22)** (ITA-06) Seja *f*: [0, 1) → IR definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2X & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

Seja g: (–1/2, 1/2) → IR dada por:

$g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2) & 0 \le x < 1/2 \end{cases}$, com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

**23)** (ITA-06) Determine o coeficiente de $x^4$ no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

**24)** (ITA-06) Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade: $\log_{\cos x}(4\operatorname{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2$.

**25)** (ITA-06) Considere o polinômio $p(x) = x^3+ax^2+x+1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:
"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

**26)** (ITA-06) As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em $m^2$.

**27)** (ITA-06) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento $C_{34}$ da matriz $C = (A+B)^{-1}$.

**28)** (ITA-06) Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de a + r.

**29)** (ITA-06) Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y - 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole. Calcule sua distância focal.

**30)** (ITA-06) Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100cm e cuja maior diagonal mede 40cm. Calcule a área, em $cm^2$, do círculo inscrito neste losango.