TRIGONOMETRIA | PROBLEMAS DE APROFUNDAMENTO

1) [AQUECIMENTO TELESCÓPICO] Determine o valor da soma

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}+\frac{\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_3)}{\cos\theta_2\cdot\cos\theta_3}+\cdots+\frac{\operatorname{sen}(\theta_{2016}-\theta_{2017})}{\cos\theta_{2016}\cdot\cos\theta_{2017}}$$

2) [BIZU DO ARCO TRIPLO]

a. (IME) Prove que $(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ)=\tan 9^\circ$
b. Encontre uma expressão simples para $\frac{\cos 3x}{\cos x}$
c. Calcule $(1+\cos\frac{\pi}{20})(1+\cos\frac{3\pi}{20})(1+\cos\frac{9\pi}{20})(1+\cos\frac{27\pi}{20})$
d. Calcule

$$\frac{27\operatorname{sen}^3 9^\circ+9\operatorname{sen}^3 27^\circ+3\operatorname{sen}^3 81^\circ+\operatorname{sen}^3 243^\circ}{\operatorname{sen} 9^\circ}$$

3) [INDUÇÃO FINITA] Prove que, para todo natural positivo n, tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 x}+\cdots+\frac{\operatorname{sen} nx}{cos^n x}=\cot x-\frac{\cos((n+1)x)}{\operatorname{sen} x\cos^n x}$$

4) [TANGENTE TELESCÓPICA]

a. Prove que $\tan x=\cot x-2\cot 2x$
b. Prove que

$$\frac{\tan a}{\cos 2a}=\tan 2a-\tan a$$

c. Calcule

$$\frac{\tan 1^\circ}{\cos 2^\circ}+\frac{\tan 2^\circ}{\cos 4^\circ}+\cdots+\frac{\tan 2^n}{\cos 2^{n+1}}$$

d. Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

e. Calcule, sendo $\tan^{-1}x$ a função inversa de $\tan x$:

$$\sum_{k=0}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

5) [COSSECANTE TELESCÓPICA] Prove que para todo inteiro positivo n e para todo real $x \neq \frac{k\pi}{2^m}$ ($m = 0,1,2 \dots$, e k um inteiro):

$$\csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + \cdots + \csc 2^n x = \cot x - \cot 2^n x$$

6) [POLINÔMIOS E TRIGONOMETRIA]

a. Calcule $\sec 40° + \sec 80° + \sec 160°$
b. Calcule $\sec 40° \cdot \sec 80° \cdot \sec 160°$

7) [COMPLEXOS NA TRIGONOMETRIA]

a. Determine $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}$
b. Encontre uma expressão em função de n para o produto

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1} \dots \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}$$