FUNÇÕES | PROBLEMAS DE APROFUNDAMENTO

1) Sabendo que $f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$, calcule $f(0) + f(1) + \cdots + f(999)$.

2) Seja uma função definida em reais tal que $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calcule

$$f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{1999}\right) + f\left(\frac{3}{1998}\right) + \cdots + f\left(\frac{1998}{3}\right) + f\left(\frac{1999}{2}\right) + f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

3) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$. Determine $\frac{1}{f(2006)}$.

4) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) + 2f(2-x) = (x-1)^3$. Determinar a expressão de f.

5) Para cada real x, a função $f(x)$ satisfaz $f(x) + f(x-1) = x^2$. Se $f(19) = 94$, calcule $f(94)$.

6) Determine a expressão da função $f(x)$ real de variável real que satisfaz

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$$

7) Seja a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$, e defina $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ com $f_1(x) = f(x)$. Encontre $f_{2015}(2015)$.

8) Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 4$, determine quantas soluções reais possui a equação $f\left(f\left(f(\ldots f(x))\right)\ldots\right) = 2$ (f está sendo aplicada 2015 vezes).

9) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz para todo x e y reais: $f(x + f(y)) = x + f\big(f(y)\big)$. Se $f(2) = 8$, calcule $f(2005)$.

10) Encontrar as funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $f(1) = 2$ e $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

11) Resolva a equação $x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$

12) Seja a real não nulo. Resolva a equação $a^3x^4 + 2a^2x^2 + x + a + 1 = 0$

13) Encontrar todos os reais positivos x, x_1, x_2, x_3 tais que

$$|\log(xx_1)| + |\log(xx_2)| + |\log(xx_3)| + \left|\log\left(\frac{x}{x_1}\right)\right| + \left|\log\left(\frac{x}{x_2}\right)\right| + \left|\log\left(\frac{x}{x_3}\right)\right|$$
$$= |\log x_1 + \log x_2 + \log x_3|$$

14) Determine todas as soluções reais da equação $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 2 = 0$.

15) Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, são permitidas as seguintes operações: trocar a e c de lugar, ou trocar x por x+1 ou por x-1. É possível, partindo de $x^2 - x - 2 = 0$, chegarmos em $x^2 - x - 1 = 0$?

16) João escreve num quadro dois números reais; em seguida, Gilberto escreve um número real no quadro; então, João monta uma equação do 2o grau com coeficientes iguais aos três números escritos no quadro (os coeficientes ficam numa ordem escolhida por João). Mostre que Gilberto sempre pode escolher o número que vai escrever no quadro de modo que a equação escrita por João possua raízes reais.

17) Determinar $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tais que:

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} + \frac{1}{8xyz} = 1$$

18) Resolva a equação em $\mathbb{R}$:

$$\arcsin\lfloor x \rfloor \cdot \arccos\lfloor x \rfloor = \frac{\pi x}{2} - x^2$$

19) Resolva a equação em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{1 + \sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos 2x} = \sqrt[3]{1 + \cos^2 x}$$

20) Encontrar as soluções reais da equação

$$\sqrt[6]{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \sqrt[6]{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = \sin x + \cos x$$

21) Determinar o valor de $2x + y$, sendo x e y reais tais que

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3y + 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = \sqrt{x^2 + 4x - 2y - 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 3y - 2}$$

22) Encontrar as soluções reais da equação

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt[4]{16x}}}}-\sqrt[8]{\sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}=\sqrt[4]{3}$$

23) Encontrar todos os reais positivos x e y que satisfazem a equação

$$\frac{\left(x\sqrt{x^8+1}+y\sqrt{y^{12}+1}\right)(x^5+y^7+x+y)}{(x^5+y^7)(x+y)}=2\sqrt{2}$$